Educitec
Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico
Número 01, ano 2015

O Ensino de Análise Combinatória como Referências Curriculares para Saberes Docentes

The Teaching of Combinatorial Analysis as Curriculum References to Teacher Knowledge

Leonardo Kenji Kashimoto
Faculdade de Ciências e Tecnologia-FCT-Unesp
l.k.kashimoto@gmail.com

.....

Raquel Gomes de Oliveira
Faculdade de Ciências e Tecnologia-FCT-Unesp
raqueloliveira@fct.unesp.br

Resumo

Este artigo é sobre uma pesquisa, realizada por um futuro professor de Matemática, que objetivou investigar a origem de uma referência curricular para saberes docentes a partir do levantamento e análise de obstáculos, erros e dificuldades, apresentados por alunos do Ensino Médio quando aprendem o conteúdo de Análise Combinatória. Os resultados mostraram que o distanciamento entre a prática pedagógica em sala de aula e a natureza do conteúdo implicou insatisfatória aprendizagem dos alunos em termos de pensamento abstrato significativo. A tomada de consciência pelo futuro professor de Matemática quanto à necessidade de se relacionar natureza do conteúdo e prática pedagógica aconteceu sob um processo que envolveu tanto desenvolvimento quanto reelaborações do saber do conteúdo matemático e de seu saber pedagógico. Portanto, conclui-se que este processo pode ser considerado uma referência curricular para o desenvolvimento de saberes docentes desde a formação inicial de professores de Matemática.

Palavras -chave: Ensino e aprendizagem de matemática, saber docente, análise combinatória.

Abstract

This paper is about a research carried out by a Mathematics future teacher, which aimed to investigate the origin of a curriculum reference for teacher knowledge from the research and analysis of obstacles, errors and difficulties presented by high school students when they learn content Combinatorial Analysis. The results showed that the gap between the pedagogical practice in the classroom and the nature of the content implied unsatisfactory learning in terms of significant abstract thinking. Awareness of the mathematics future teacher on the need to relate the nature of the content and pedagogical practice took place under a process that involved both development and reworkings of knowledge of the mathematical content and its pedagogical knowledge. Therefore, it is concluded that this process can be considered a reference curriculum for the development of teacher knowledge from the initial Mathematics Teacher Education.

Keywords: mathematics teaching and learning; teacher knowledge; combinatorial analysis

Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) defendem para a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias a necessidade de "... contemplar formas de apropriação e construção de sistemas de pensamento mais abstratos e ressignificativos..." (PCNs, p. 33). Assim, entende-se nesta defesa a importância da compreensão, pelos alunos, dos fenômenos físicos e sociais, além de predições de suas consequências.

Dados do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) de 2011 mostram que o percentual médio de alunos com rendimento considerado satisfatório em matemática no ensino fundamental é maior que no ensino médio. De uma média de 64,9% de alunos com rendimento satisfatório no 7º ano, para 64,1% no 9º ano, e 44,5% ao final do 3º ano do ensino médio. O que configura indicativos de que algo tem funcionado mal no processo de ensino e aprendizagem de Matemática dos alunos do ensino médio, do Estado de São Paulo.

Assim, realizou-se uma pesquisa que buscou responder à questão: como podem ser desenvolvidos saberes docentes quando se busca a origem de erros e dificuldades dos alunos quando aprendem Matemática? Neste caso, os saberes docentes são necessariamente o saber do conteúdo e o saber pedagógico do conteúdo referenciados por Shulman (1986). Logo, a pesquisa teve como objetivo investigar a origem de uma referência curricular para saberes docentes a partir do levantamento e análise de obstáculos, erros e dificuldades, apresentados por alunos do Ensino Médio quando aprendem Análise Combinatória.

De acordo com resultados da pesquisa, a tomada de consciência pelo futuro professor quanto à necessidade de se relacionar natureza do conteúdo e prática pedagógica aconteceu sob um processo que envolveu tanto desenvolvimento quanto reelaborações do saber do conteúdo matemático e de seu saber pedagógico. Acreditamos que os resultados apresentados possam ser referências tanto para a elucidação de saberes docentes como para futuras pesquisas sobre este tema.

Fundamentação Teórica

A fim de fazer um levantamento de obstáculos, erros e dificuldades diante do conteúdo Análise Combinatória, três conceitos foram focalizados nesta fundamentação teórica: problema, linguagem e erro. Geralmente, um problema pode ser visto como uma situação que para ser superada demanda articulações entre ações físicas e operações mentais:

> Aprender a resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução matemática. Certamente outros objetivos da Matemática devem ser procurados, mesmo para atingir o objetivo da competência em resolução de problemas. Desenvolver conceitos matemáticos, princípios e algoritmos através de um conhecimento significativo e habilidoso é importante. Mas o significado principal de aprender tais conteúdos matemáticos é ser capaz de usá-los na construção das soluções das situações-problema (HATFIELD, apud DANTE, 2000, p. 7).

Associada às múltiplas definições de problemas está a ideia de que quando há um problema não existe um procedimento imediatamente acessível que garanta ou determine de maneira completa suas soluções (LESTER apud D'AMORE, 2007). Desse modo, o indivíduo ou grupo ao qual foi proposto o problema deve realizar um salto, partindo da situação atual para alcançar uma outra considerada mais favorável.

Para D'Amore (2007) um problema, no contexto do ensino, acontece quando:

> … uma, ou mais, das regras de um, ou mais dos procedimentos necessários ainda não estão na bagagem cognitiva do responsável por resolvê-lo; na ocasião, alguma dessas regras ou algum desses procedimentos poderia inclusive estar em via de explicitação; às vezes, é a própria sucessão de operações necessárias para resolver o problema demandará um ato criativo por parte de quem precisa resolvê-lo (D'AMORE, 2009, p. 286).

O interesse pelo conceito de problema e por sua resolução tem sido tema de diversas pesquisas. (BRITO et al, 1994; CHARLES; LESTER, 1986; ECHEVERRIA; POZO, 1998; KRUTESKII, 1976; LEBLANC, 1982; POLYA, 1975; SCHONFELD, 1987; STERNBERG, 1994).

Buranello e Pirola (2005) realizaram uma pesquisa sobre a resolução de problemas nas aulas de Matemática, que teve como um dos objetivos específicos analisar dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas sob o ponto de vista dos professores. Uma das dificuldades apontadas pelos professores se relaciona com a interpretação do enunciado dos problemas que, para ser alcançada, necessita tanto de habilidade verbal, apontada por Brito, Garcia e Fini (1994) como do que denominou Kruteskii (1976) de habilidade para perceber relações entre os dados fornecidos no problema. Focando no papel da linguagem na solução de problemas, Brito (2006) destaca que o processo de obtenção da resposta e, portanto, o caminho para a solução do problema exigem tanto habilidade verbal como a habilidade matemática e que a primeira etapa da solução é basicamente atada à compreensão verbal do problema, que é vinculada à ação de conceituar.

Assim como a resolução de problemas, a definição de conceito e o interesse por sua elaboração têm sido tema de diversas pesquisas em variadas áreas de conhecimento (CARAÇA, 1998; PIAGET, 1985; VYGOTSKY, 1997, VERGNAUD, 1993).

Mais especificamente, Vergnaud (1993) explicou os mecanismos da construção de conceitos propriamente matemáticos em um contexto de aprendizagem escolar. Ele defende que o conhecimento emerge de problemas a serem resolvidos e de situações a serem dominadas tanto em aspectos práticos como teórico. Nesse sentido, situações de ensino devem levar os alunos a descobrir relações e questões além das que estão habituados, pois concepções, modelos e teorias dos alunos são formados através de situações as quais são submetidos (VERGNAUD, 1993).

Dentro de uma abordagem desenvolvimentista, concepções e habilidades desenvolvem-se no decorrer da vida do sujeito. Isto se dá não apenas para características gerais do pensamento, tais como foram estudadas por Piaget e outros psicogeneticistas, mas também para conteúdos específicos do conhecimento.

Vergnaud (1993) considera um conceito como uma terna C= (S,I,R) onde S é o conjunto de relações que tornam o conceito significativo, I é o conjunto de invariantes operatórios que são subjacentes ao procedimento dos sujeitos frente a uma situação e R é o conjunto de representações simbólicas usadas para representar o conceito, suas propriedades e situações as

quais se refere. Invariantes operatórios são operações do pensamento que permitem agir nas situações e significantes são o conjunto de símbolos usados para representar os invariantes, as situações e os procedimentos de tratamento. Desse modo, um conceito remete necessariamente a muitas situações, a muitos invariantes e também a muitas representações possíveis, sendo a representação fundamental para a análise da formação de um conceito e de sua utilização. Por representação, entende-se a estreita ligação entre significante e significado. Logo, entre aquilo que sustenta a linguagem natural (falas, símbolos, desenhos, fórmulas, diagramas, gráficos…) e aquilo que compõem o próprio significado (invariantes de diferentes níveis, inferências, regras de ação e predições). A representação é funcional à medida que regula a ação, que originará outras ações e adaptações à realidade. Nesse sentido, representações e símbolos são parceiros nestas adaptações.
Os símbolos têm seus papéis no que diz respeito a acordos entre sujeitos quanto a um conceito, mas não são necessariamente intermediários obrigatórios entre significantes e significados. Toda relação entre o real e o simbólico é mediada pelo significado. Assim, um símbolo só é funcional à medida que existe para o sujeito. Assim, as representações utilizadas pelos alunos, para um observador externo, podem ser uma ponte direta para a observação do conceito criado pelo aluno (VERGNAUD, 1993).

Tanto para questões sobre formação de conceitos como para as de resolução de problemas, o erro tem se mostrado frequente e importante tema de estudo. Desde sua concepção como um sinal de fracasso até às referências para o diagnóstico na aprendizagem dos estudantes, podendo trazer pistas para a sua reabilitação (BORASI apud MEDEIROS E PACHECO, 2009), o erro tem se configurado como característica comum na solução de problemas em Matemática.

A investigação do conceito de erro dentro de um contexto de aprendizagem interativa necessariamente implica conhecer o conceito de obstáculo. D'Amore (2007) define obstáculo como uma ideia que no momento da formação de um conceito foi eficaz para enfrentar problemas anteriores, mas que se revela um fracasso quando se tenta aplicá-lo a um novo problema. Mais especificamente, o obstáculo pode ser categorizado quanto a sua natureza em: ontogenético, didático ou epistemológico. Em síntese, essas categorias podem ser explicadas sendo o obstáculo ontogenético aquele ligado ao estudante e sua maturidade, o obstáculo didático aquele que depende da escolha estratégica do docente, e o epistemológico como aquele que deriva da própria natureza do assunto (D'AMORE, 2007, p. 212).

Desse modo, pela categorização dos erros dos alunos temos oportunidade de identificar obstáculos, analisar sua natureza e avaliar onde residem as dificuldades ou problemas. Especificamente sobre o conteúdo de Análise Combinatória para o Ensino Médio, percebe-se com muita frequência a confusão entre os conceitos de arranjo simples e de combinação:

Arranjos simples são considerados todos os agrupamentos simples de p elementos que podem ser formados com n elementos distintos, dado $p \leq n$. Cada um desses agrupamentos se diferencia de outro pela ordem ou natureza de seus elementos. Exemplo de arranjos simples: Uma escola possui 25 professores. Deverão ser escolhidos um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico. Quantas são as possibilidades de escolha?

Já nas Combinações simples são considerados todos os agrupamentos simples de p elementos que podem ser formados com n elementos distintos, dado $p \leq n$. Cada um desses agrupamentos se diferencia de outro somente pela natureza de seus elementos.

Exemplo de combinação simples: Um escola tem 25 professores. Três deles deverão representá-la em um curso. Quantas são as possibilidades para a formação de grupos com 3 professores?

Como a maioria dos conceitos matemáticos, os conceitos de arranjo simples ($A_{n,p}$) e de combinação simples ($C_{n,p}$) também possuem uma expressão ou fórmula matemática:

$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ e $C = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ respectivamente.

Aliado à confusão conceitual, é comum o uso de fórmulas matemáticas (ou procedimentos algorítmicos) para a resolução de problemas simples que não necessitam desse recurso. Quando se utilizam expressões matemática ou fórmulas desprovidas de significado matemático acaba-se por vivenciar nos processos de ensino e aprendizagem o que D'Amore (2007) chama de “matematiquês”.

Exemplo disso pode ser encontrado no estudo feito por Pacheco (2001) apud Medeiros e Pacheco (2009), num trabalho de investigação realizado com estudantes entre 17 e 20 anos concluintes do Curso Técnico em Agropecuária, em Alagoas. Nesse estudo, os alunos apresentaram um número relativamente alto de respostas insatisfatórias e houve predominância do uso de fórmulas para a resolução dos problemas apresentados, mesmo tendo sido previamente apresentadas outras abordagens para problemas de contagem.

As definições de obstáculos, erros e dificuldades desta fundamentação teórica foram consideradas diante da necessidade de serem parâmetros para que o objetivo desta pesquisa fosse atingido.

Metodologia

A pesquisa realizada pode ser considerada descritivo-qualitativa, pois seu objetivo era identificar e descrever procedimentos de alunos do 2º ano do ensino médio diante de problemas, envolvendo contagem e probabilidade no que tange aos principais obstáculos no ensino desses conteúdos. Nesse sentido, descrevemos e analisamos, a partir da categorização de tipos de abordagem sobre os problemas propostos, entraves na resolução de problemas envolvendo arranjos, permutações e combinações.

Durante o ano letivo de 2013, um licenciando do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública paulista acompanhou aulas de Matemática sobre o conteúdo Análise Combinatória junto a alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual paulista. Esse acompanhamento permitiu organizar registros sobre atividades didáticas e sobre o desempenho dos alunos e, elaborar uma prova diagnóstica que demonstrasse o desempenho deles. A prova diagnóstica propunha a resolução individual de problemas verbais envolvendo princípios de contagem (Quadro 1).

Todos os problemas podiam ser resolvidos sem uso de fórmulas e estes correspondiam a situações conhecidas pelos alunos. Os alunos registram na prova suas ações e conclusões sobre cada questão proposta. Os dados foram analisados de forma que os erros dos alunos foram categorizados em erros primários (conceituais, de raciocínio ou notação incoerente) e erros secundários (erros de cálculo ou de escrita) para somente depois serem analisados em decorrência de obstáculos epistemológicos ou didáticos. Procedimentos realizados pelo licenciando para o desenvolvimento da pesquisa, tais como: observação em sala de aula, elaboração de avaliação diagnóstica, descrição, análise e reflexão sobre dados e elaboração de conclusões foram determinantes para responder à questão da pesquisa.

Resultados e análises

Sendo aplicadas 40 provas para uma única classe, tendo cada prova quatro questões, somando um total de 160 questões, obtivemos um total de 124 respostas insatisfatórias, e 36 acertos. Dessas respostas insatisfatórias, 17 foram entregues em branco e três provas inteiras não apresentavam qualquer linha escrita.

As respostas insatisfatórias tiveram suas abordagens classificadas em três categorias: 1) erros primários, ou estruturais (relativos à natureza do problema combinatorial); 2) erros secundários (relativos a inapetência, inabilidade para a aplicação do método de resolução) e 3) erros terciários (relativos a cálculos, esquecimentos, etc.).

Em nossa análise, desconsideramos o estudo dos erros terciários, e partimos para o cerne da questão, priorizando o estudo dos erros primários e secundários.

Dentre os 104 erros primários apresentados, a maior parte se referia a abordagem adotada nas questões 2 e 3. Repetidas vezes observamos o padrão de tratar o primeiro problema como uma questão envolvendo a estrutura de arranjo simples, e o segundo como envolvendo a estrutura de combinação, e entre esses casos houve também predomínio do uso das fórmulas. Os erros secundários, 7 entre 124, constituem a minoria e estão mais relacionados a enganos quanto à função de agrupamentos e elementos no contexto do problema.

A Questão 1 foi a que apresentou maior índice de acertos, tendo 22 acertos de 40. A Questão 2 não foi respondida com sucesso por qualquer dos alunos avaliados. A questão 3 foi respondida com maior sucesso entre os que representaram os espaços de probabilidade e aplicaram o princípio fundamental da contagem, e respondida com maior insucesso pelo uso de fórmulas. Já a Questão 4, foi respondida de modo satisfatório tanto pelo uso da árvore de possibilidades, quanto pelo uso da fórmula da combinação, por outro lado, proporcionalmente, o montante de respostas erradas obtidas por uso de fórmulas é muito maior que o de sucessos.

A análise dos resultados se divide em duas partes: 1) descrição da metodologia de ensino e a sequência didática observadas em sala de aula e 2) erros cometidos pelos alunos nas avaliações.

1) Descrição da metodologia de ensino e a sequência didática observadas em sala de aula

A metodologia adotada pelo professor responsável pelas aulas de Matemática baseou-se em: verbalização sobre o conteúdo a ser trabalhado por meio de aulas expositivas, disponibilização de conceitos e exemplos na lousa, aplicação de listas de exercício separadas por temas, proposta para os alunos de resolução de listas mistas. A avaliação realizada pelo professor sobre o desempenho dos alunos ocorreu de modo pontual, tendo como instrumento de avaliação uma prova escrita.

Os conteúdos de Análise Combinatória foram trabalhados em sala de aula através de uma sequência didática que abordava o princípio fundamental da contagem (princípio multiplicativo), diagramas ou árvores de possibilidades, o número fatorial e permutações, operações com número fatorial, arranjo simples, permutações com repetições, e combinação simples, nesta ordem. Quanto à produção didática dos alunos, esta se limitou à resolução das listas de exercício e as cópias dos conteúdos e exemplos. Os exemplos e as listas em sala de aula seguiram a segmentação temática da sequência descrita no parágrafo acima.

A apresentação dos temas nessa ordem tende à validação das operações que compõem as fórmulas do arranjo simples e da combinação simples. Partindo do princípio multiplicativo, como um conceito primitivo e de fácil aceitação, o intuito é obter a formulação matemática para a contagem de permutações possíveis, e a seguir, tratar de arranjos como uma extensão da ideia de permutação (permutações de um conjunto de elementos restritos a uma quantidade ainda menor), introduzir a ideia de eliminação de repetições por divisões, como uma reversão do processo de formação das árvores de possibilidades, para então tratar da combinação simples como contagem de arranjos a menos da ordem dos elementos.

No entanto, essas considerações são válidas somente quando os alunos possuem um bom nível de abstração algébrica e são capazes de associar, sem maiores dificuldades, operações matemáticas com ações, ou representações de ações. Caso contrário, a sequência se torna menos relevante para o processo de aprendizagem, devendo-se cuidar do entendimento das situações de contagem a priori, em vez das ferramentas matemáticas para tal fim.

A observação das aulas permite afirmar a existência de ações didáticas focadas na repetição de exercícios e exemplos em detrimento da aquisição da linguagem e notação, da associação do conceito abordado ao seu respectivo contexto social, e da diversidade de abordagens sobre situações de contagem, por motivos que não serão amplamente discutidos aqui.

2) Sobre erros cometidos pelos alunos nas avaliações

A avaliação diagnóstica era composta por quatro problemas verbais em análise combinatória, contando com um problema de contagem de permutações, um problema de contagem de arranjos e dois problemas sobre contagem de agrupamentos. A avaliação foi também pensada de modo a contemplar mais de um método resolutivo para cada questão para a escolha do aluno para que este pudesse ser observado segundo a competência de interpretar um problema verbal e abordá-lo adequadamente.

A prova foi aplicada individualmente, segundo instruções previamente expostas no corpo da folha de questões. Quatro tipos de prova foram elaborados, diferenciando-se apenas pela ordenação das questões, que são descritas com sua principal característica no quadro 1.

Questão	Característica da questão
1) Raul, Anne, Nádia, Diego, Omar e Marcela, querem formar uma sigla com a primeira letra de cada um de seus nomes, de quantas formas isso pode ser feito?	Envolve permutações em que nenhuma quantidade é fornecida explicitamente. Diferentemente dos exercícios aplicados aos alunos nas aulas, não remete a anagrama.
2) Em uma pequena classe com oito estudantes, o professor quer realizar uma atividade e precisa dividir a classe em dois grupos com a mesma quantidade de alunos. De quantas formas diferentes ele pode fazê-lo?	Envolve a ideia de contagem de agrupamentos sem explicitar todos os dados de forma direta requerendo análise da situação e conexão com o contexto para evitar dissensões.
3) Na mesma classe com oito estudantes, os alunos querem formar uma comissão de formatura com presidente, vice-presidente, tesoureiro e orador. Sendo que nenhum deles tem preferência quanto ao cargo, e todos estão dispostos a desempenhar as tarefas, de quantas formas eles podem realizar essa comissão?	Envolve a estrutura de arranjos, com informação sobressalente.

4) Seis times de basquete disputam um campeonato onde todos jogam contra todos, uma vez contra cada time. Sabendo que cada jogo ocorre em um dia distinto, em quantos dias, ao mínimo, esse campeonato vai terminar?	Problema não muito usual, mas delineado num contexto conhecido dos alunos, tendo potencial para diversas resoluções, sendo rapidamente resolvido pela fórmula da contagem de combinações.

Quadro 1: questões e suas principais características
Fonte: elaborado pelos autores

Mais especificamente, ainda que variando a ordem de apresentação das questões nas diferentes folhas de prova, duas perguntas mantinham-se em seqüência: as questões 2 e 3. Prevendo efeitos negativos do sequenciamento segmentado do conteúdo pelas práticas de ensino adotadas, optamos também por apresentar primeiro um problema de combinação e a seguir um de arranjo a fim de testar a hipótese de que esquemas de atuação parasitas são utilizados pelos alunos a fim de realizar suas avaliações de modo mais objetivo, sem passar por todas as etapas do aprendizado propostas pelo professor.

Discussão dos resultados

A Questão 1 teve 22 abordagens satisfatórias. Treze alunos aplicaram corretamente a fórmula de contagem. Nove não utilizaram explicitamente a fórmula, mas consideraram a multiplicação das possibilidades em cada posição, segundo o princípio multiplicativo. Para as 18 abordagens insatisfatórias, 3 alunos não responderam à questão e 9 alunos aplicaram o princípio multiplicativo de forma incorreta. Ainda 8 alunos utilizaram fórmulas incoerentes com o problema.

Ao aplicarem o princípio multiplicativo incorretamente, a maior parte dos alunos cometeu erros estruturais, fazendo o produto entre a quantidade de nomes e a quantidade de letras da sigla (Figura 1), mostrando que não houve entendimento da natureza combinatorial do problema, que envolvia permutar as letras e não associá-las uma a uma aos nomes.

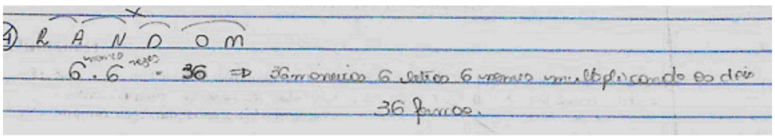

Figura 1: erro sem uso de fórmula
Fonte: resolução apresentada por aluno da 2ª série do Ensino Médio

Quanto aos erros cometidos por uso de fórmulas, os casos observados não apresentaram qualquer conexão com a resolução do problema, configurando uma situação de completa inapetência quanto à determinação da natureza e a formulação matemática envolvidas (Figura 2).

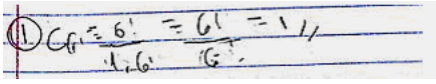

Figura 2: erro por uso de fórmula inconsistente
Fonte: resolução apresentada por aluno da 2ª série do Ensino Médio

A não observação da incoerência da resposta, bem como o "chute" para a mesma são comumente encontradas em situações escolares. Nesta pesquisa, a observação do trabalho didático nas aulas de Matemática permite afirmar que o ensino caracterizado pela busca da síntese do conhecimento em aforismos matemáticos, levou os alunos a construírem um universo de informações e procedimentos paralelo à natureza do conhecimento em si. Logo, fomentando o desenvolvimento de modelos mentais parasitários, no sentido de D'Amore (2007), como uma forma de simplificar as operações que os levem até o ponto considerado culminante do ensino: a nota.

Outros alunos partiram para abordagens mais primitivas, como a formação das n-uplas ordenadas para contagem (Figura 3), e apesar do entendimento incorreto da questão essas resoluções malsucedidas demonstraram algum grau de coerência com o verdadeiro sentido da sua resposta. O conceito de erro, enquanto conhecimento insatisfatório do aluno ou contraditório a uma situação, poderia aqui ser utilizado pelo professor a fim de que esse conhecimento do aluno fosse reelaborado até se chegar a um correto raciocínio combinatório.

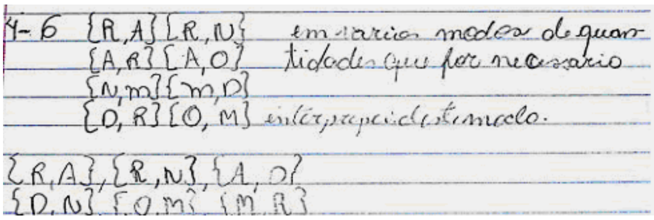

Figura 3: resolução por contagem direta
Fonte: resolução apresentada por aluno da 2ª série do Ensino Médio

Na Questão 2, todas as abordagens foram insatisfatórias. Três alunos não responderam a questão, 28 alunos utilizaram fórmulas e 9 alunos não as utilizaram. Entre os 28 alunos que utilizaram fórmulas, 19 alunos utilizaram a fórmula do arranjo simples e 2 alunos utilizaram a permutação simples. Ainda para as respostas insatisfatórias, 12 alunos não conseguiram distinguir a natureza do problema verbal apresentado e 3 alunos cometeram erros de segunda ordem, com aplicação da fórmula da combinação simples.

A utilização errônea de fórmulas na resolução da questão 2 reflete a lógica de processos de ensino e aprendizagem de Matemática caracterizados pelo trabalho didático com a apresentação da fórmula matemática sem a construção anterior do conhecimento matemático que essa formula sintetiza. Os procedimentos dos alunos que utilizaram fórmulas assinalam que estes alunos não compreenderam que a fórmula do arranjo remete ao procedimento de contagem de n-uplas ordenadas e, portanto, na fórmula, um dos subíndices representa a quantidade de elementos de cada n-upla.

Isso significa que houve uma dissensão entre os componentes semânticos e a estrutura lógica do problema que esses alunos não conseguiram superar. Essa dificuldade dos alunos para interpretar o enunciado dos problemas tanto indica ausência de habilidade verbal (BRITO, GARCIA; FINI, 1994), como de habilidade para perceber relações entre os dados do problema (KRUTESKII, 1976). Contudo, para Kruteskii (1976). Essas habilidades podem ser desenvolvidas na escola através de um ensino adequado no qual a resolução de problemas seja meio para levar o aluno "... à compreensão de conceitos e princípios, habilitando-o a transferi-los para novas situações." (BURANELLO e PIROLA, 2005, p. 6).

Sobre o ensino de habilidades na escola, quando Vergnaud (1993) defende que um conceito está ligado a muitas situações e representações, leva a pensar na ineficiência didática da separação de conceitos em blocos rígidos com pouca ou nenhuma articulação entre os mesmos: primeiro ensina-se contagem, depois arranjo, depois combinação..., criando assim uma zona de conforto para o aluno na qual sua ação claramente limita-se a executar uma das operações propostas naquela aula de Matemática, sem que este se questione quanto à validade dos métodos empregados ou das respostas obtidas na resolução de um problema, algo que explicaria a grande quantidade de resposta incoerentes na Questão 2.

Um segundo tipo de erro comum envolvendo a determinação da natureza do problema, foi o uso do arranjo simples, mas com identificação correta dos elementos que compõem a notação da fórmula.

Esse exemplo também contribui com a tese de que não somente os conteúdos sofrem com a competição com modelos parasitas, no sentido de D'Amore (2007), mas também as demais atividades escolares estão permeadas por modos de ação que pouco oportunizam elaboração de raciocínios componentes de processos de abstração. Isso porque as questões 2 e 3 foram propositadamente apresentadas uma após a outra em todas as folhas de prova, e essas questões se resolvem, respectivamente, pela combinação e arranjo, ordem inversa da forma com que aparecem na sequência didática do professor, e o que ocorreu foi a inversão da aplicação das respectivas fórmulas resolutivas. A inversão caracterizada pelo tratamento da Questão 3, de arranjo como combinação, e a Questão 2, de combinação como arranjo, foi observada em 8 alunos.

A Questão 3 teve 32 abordagens insatisfatórias sendo 20 com uso de fórmulas. Dessas 20 respostas insatisfatórias com uso de fórmulas, 14 foram caracterizadas pela aplicação da fórmula da combinação no lugar da fórmula do arranjo. Observamos também que, na verbalização do problema, a informação adicional indicando que os candidatos não possuíam preferência quanto ao cargo pode ter sido entendida como um indicativo do aforismo presente na seqüência de ensino do conceito de Combinação: "...combinação é quando a ordem não importa".

Isso posto, é evidente que, mesmo necessária, a síntese do aprendizado não pode ser o centro da prática docente, pois o que se evidenciou com essas respostas foi a generalizada falta de critérios para as abordagens dos problemas. Muitas abordagens foram escolhidas por intuição, como as indicadas pelas respostas sem qualquer justificativa, (Figura 4). Não se trata somente de um problema de verbalização e competência leitora, equívocos dessa natureza caracterizam também a não compreensão da natureza das operações que envolvem arranjos e combinações.

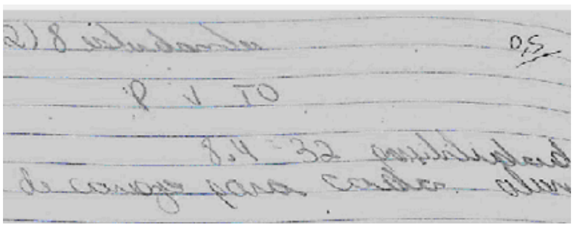

Figura 4: resolução por cálculo sem justificativa
Fonte: resolução apresentada por aluno da 2ª série do Ensino Médio

Somente 6 alunos responderam satisfatoriamente a Questão 4. Das 34 abordagens insatisfatórias, 14 alunos utilizaram fórmulas, 12 alunos utilizaram o princípio multiplicativo sobre dados que não eram relevantes ao problema e 6 alunos não responderam.Um aluno representou o problema por um diagrama e chegou a uma resposta inconsistente ao problema apresentado.

É interessante notar que o problema da Questão 4 pode ser resolvido simplesmente por contagem, por árvore de possibilidades ou pela aplicação de fórmulas, fornecendo mais possibilidades de caminhos de resolução e chegada a respostas pelos alunos. O fato de que a contagem de pares de times resolveria a questão e considerando que esta teve elevado número de erros, permite concluir que a maioria desses alunos não teve nenhuma compreensão da natureza do problema combinatório que envolve contagem de agrupamentos. Somando-se os acertos das duas questões resolvíveis por fórmula de combinação, obtivemos um total de 6 acertos entre os 80 possíveis. Novamente, os resultados remetem a pensar na falta de referência de uma efetiva didática baseada, sobretudo, em fundamentos coerentes para a definição e elaboração de um conceito matemático como, por exemplo, os defendidos por Vergnaud (1993).

A figura 5 exemplifica o tipo de erro mais comumente encontrado entre as respostas consideradas insatisfatórias. Na maior parte desses casos, multiplicar 6 por 6 significou contar quantas opções tem-se em cada espaço representando os times a jogar. Entretanto, não observar que um time não pode jogar contra si próprio e que os jogos duplicados devem ser ignorados contribuiu para o pouco entendimento semântico do problema. Isto mostra mais uma vez a tendência de se trabalhar com dados numéricos do problema sem atentar para pertinência da resposta ao que foi perguntado.

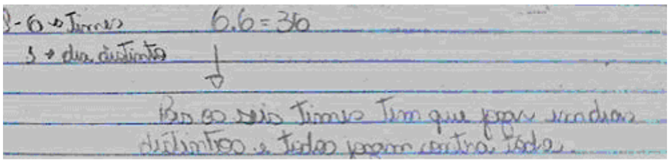

Figura 5: erro mais comum apresentado nas respostas da questão 4
Fonte: resolução apresentada por aluno da 2ª série do Ensino Médio

A pouca utilização da fórmula da combinação em relação às outras questões mostra que nem sua utilidade ou aplicabilidade desta foi compreendida. Causas para esses procedimentos podem ser atribuídas à antecipação da simbologia matemática em relação ao significado das operações. Um segundo tipo de erro cometido, mais próximo de uma compreensão de uma resolução satisfatória do problema é visto na figura 6.

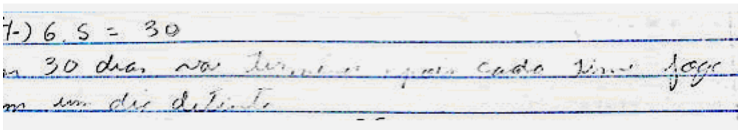

Figura 6: erro ilustrando a falta de sentido às operações realizadas
Fonte: resolução apresentada por aluno da 2ª série do Ensino Médio

Esses dois tipos de erros (Figura 5 e Figura 6) podem ser entendidos como exemplos de como atividades didáticas refletem em procedimentos dos alunos nos quais as resoluções e ou respostas apresentadas têm pouca ou nenhuma conexão com a realidade. Problemas verbais inseridos em contextos comuns ao entendimento dos alunos não produziram, na maioria dos casos, um suporte às reflexões quanto aos procedimentos que os levariam à resolução do problema. A maior parte dos alunos não se mostrou capaz de se apoiar na representação de uma situação real para depurar os fatos necessários à formulação de uma resposta coerente.

De maneira geral, erros, dificuldades e obstáculos apresentados pelos alunos quando da resolução das 4 questões se constituem referências para a formação do saber do professor de Matemática, no sentido de Shulman (1986), que defendeu, tomando como referência Dewey que o conteúdo a ser ensinado pelo professor, em suas aulas, necessita ser psicologizado, no sentido de ser reelaborado em vista do objetivo de ensinar, sendo assim transformado em conteúdo de ensino passível que o aluno aprenda. Essa transformação requer capacidades do professor de representar um conceito por várias maneiras (anagramas, metáforas, associações, exemplos, parábolas, desenhos, recursos mnemônicos, gráficos...), contribuindo tanto para as representações iniciais que os alunos possam ter do conteúdo como as mostradas nesta pesquisa e, ainda, para a possibilidade de que os mesmos façam reelaborações em sentidos cada vez mais avançados e próximos do conhecimento escolar.

Em última instância, a observância de tais eventos pode significar alienação do sistema escolar apoiado numa cultura de procedimentos próprios que se estende para além do “matematiquês” descrito por D'Amore (2007) e podem ser denominados de fontes de obstáculos didáticos na aprendizagem de um conceito matemático.

Conclusão

A análise das respostas, precisamente dos erros na resolução dos problemas verbais propostos, evidenciou dificuldades dos alunos, quanto ao conteúdo de Análise Combinatória, que possivelmente tiveram origem no desenvolvimento do conteúdo por meio de sequenciamento didático segmentado. A opção docente por se trabalhar didaticamente dessa maneira expõe a questão da alienação escolar através de práticas que favorecem desempenhos cognitivos muito aquém dos necessários para o desenvolvimento de competências e habilidades que caracterizam o aprendizado na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias com vistas à construção, pelo aluno, de sistemas de pensamentos mais abstratos e passíveis de serem ampliados.

Além disso, a elevada quantia de respostas não condizentes com a natureza combinatorial do problema e a confusão demonstrada pelos alunos para a determinação da aplicabilidade de cada fórmula, indicam que os objetivos das aulas não estavam voltados para o entendimento do significado dos conceitos matemáticos e suas operações; mas sim, para o pensamento mais sintético e imediatamente abstrato, originando erros, que podem ser atribuídos também à didática realizada pelo professor. As análises dos resultados podem ser entendidas como parâmetros para a gestão curricular em sala de aula, porque sinalizam caminhos para o desenvolvimento e ampliação de habilidades nos alunos a partir do que demonstram saber, que, em parte, tem origem no modo de se trabalhar em sala de aula e sobre como as aulas são percebidas pelos mesmos.

No ensino de Análise Combinatória, a fim de evitar os mesmos problemas relatados, é importante ter clareza sobre o que os alunos já sabem e o que não sabem. O considerável número de respostas em branco, bem como as respostas absurdas, revela absoluta disparidade de estágios de aprendizagem, o que coloca tais alunos em situação de marginalidade ao aprendizado sob uma seqüência didática que prima por fórmulas e por preceitos. Quanto à questão da não identificação correta, pelos alunos, de estratégias de abordagem, é preciso repensar o próprio conhecimento do professor sobre a ideia de conteúdo de ensino, no sentido de Shulman (1986). Conhecimento que faz remeter à formação inicial do professor na qual sua formação didático pedagógica deveria oportunizar conceber conteúdos como competências mais do que informações, priorizando atitudes além de tópicos de ensino e levando o futuro professor de Matemática entender que a síntese de um conceito, por meio de fórmula, ocorre somente a partir de um conhecimento com significado matemático. Sem esse conhecimento, ainda que se alcance a síntese ou o domínio de fórmulas, não há razões que garantam o sucesso do aprendizado em termos de condições de pensamentos abstratos e de suas características tidos como fundamentais para positiva inserção na sociedade atual.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio.** Brasília: MEC / SEMTEC, 1999.

BRITO, M. R. F. De (Org.), **Solução de Problemas e a Matemática Escolar**. Campinas, Alínea, 2006.

BRITO, M. R. F; FINI, L. D. T.; GARCIA, V. J. N. Um Estudo exploratório sobre as relações entre o raciocínio verbal e o raciocínio matemático. **Pro-Posições**, 5, p. 37-44, 1994.

CHARLES, R. The role of problem solving. **Arithmetic Teacher**, 32, p. 48-50, 1993

CHARLES, R.; LESTER, F. **Mathematical Problem Solving.** Springhouse, PA: Learning Institute, 1986.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonome. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. POZO, J. I. (Org.). ECHEVERRÍA, M. D. P. P. **A Solução de Problemas: Aprender a Resolver, Resolver para aprender.** Porto Alegre: ARTMED. 1998.

KRUTETSKII, V. A. **The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren**. KILPATRICK, J.; WIRSZUP, I. (Eds). Chicago: University of Chicago Press. 1976

LEBLANC, J. F. Teaching Textbook Story Problems. **Arithmetic Teacher.** 29, p. 52-54, 1982.

MAYER, R. E. A capacidade para a matemática. STERNBERG, R. **As capacidades intelectuais humanas. Uma abordagem em processamento de informação.** Porto Alegre: Artes Médicas. 1992.

MEDEIROS, C.; PACHECO, A. B., Uma investigação sobre o uso de estratégias para a resolução de problemas verbais em análise combinatória. MARANHÃO, C. (Org.). **Educação matemática nos anos finais do ensino fundamental e médio: pesquisas e perspectivas.** São Paulo: Musa Editora, 2009.

PIROLA, N. A.; BURANELLO, L. V. A. A resolução de problemas nas aulas de matemática. **Anais do** V Encontro nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 2005. p. 110-110.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas. Um novo aspecto do método matemático.** Rio de Janeiro: Interciência. (Segunda impressão, 1975). 1994

SCHOENFELD, A. H. **Cognitive Science and Mathematics Education**. London: Erlbaum. 1987.

SHULMAN, Lee. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. In: **Educational Researcher,** 15**,** p. 4 – 14, 1986.

STERNBERG, R. J.(ED.) **Thinking and problem solving**. Califórnia: Academic Press. 1994.

PIAGET, J. **The equilibration of cognitive structures**. Chicago: The University of Chicago Press, 1985.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.). SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 1993, Rio de Janeiro. **Anais do** Seminário Internacional de Educação Matemática. p. 1-26.