# Articulação de registros de representações na construção de provas empíricas e teóricas por um grupo de professores de Matemática

## Articulation of representation records in the construction of empirical and theoretical proof by a group of mathematic teachers

**Eberson Paulo Trevisan**
Universidade Federal de Mato Grosso
eberson76@gmail.com

.....

**José Luiz Magalhães de Freitas**
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
joseluizufms2@gmail.com

## Resumo

No presente artigo, apresentamos resultados de uma pesquisa realizada com professores da rede pública estadual de um município de Mato Grosso, em que visamos identificar a articulação de registros de representações semióticas utilizados para dar sustentação às validações produzidas pelos professores em duas categorias de provas: empíricas e teóricas. Metodologicamente, buscamos uma aproximação com os pressupostos da Engenharia Didática, com a produção dos dados ocorrendo durante curso de extensão que visava a pesquisa e a formação continuada de professores. Foram identificadas produções distintas, envolvendo essas duas categorias de provas, com emprego do registro em linguagem natural nas provas teóricas e do registro figural nas provas empíricas, especialmente pela construção de materiais manipuláveis. Esse fato indica a necessidade de buscar a articulação entre as duas categorias de provas nos processos de ensino por meio de um trabalho com multirregistros que busque uma aproximação com os pressupostos da teoria dos registros de representações semióticas.

**Palavras-chave:** Provas empíricas e teóricas. Registro de representação semiótica. Ensino de geometria.

## Abstract

In article we present results of a research carried out with teachers of the public education of a municipality of Mato Grosso, in which we aim to identify the articulation of records of semiotic representations that were used to support the validations produced by teachers in two categories of proof: Empirical and theoretical. Methodologically, we seek an approximation with the assumptions of Didactic Engineering, with the production of the data happening during extension course aimed at research and continuous formation of teachers. Different productions were identified involving these two categories of proof using the natural language register in the theoretical proof and the figural record in the empirical proof, especially through a construction of manipulable materials. This fact indicates the need to get the articulation between the two categories of evidence in the teaching processes through a multi-registry work that seeks an approximation with the assumptions of the theory of records of semiotic representations.

**Key words:** Empirical and theoretical proof. Record of semiotic representations. Geometry teaching.

## Introdução

Neste artigo, buscamos trazer um recorte da tese de doutoramento apresentada em Trevisan (2016), cujo tema de estudo se situou na articulação entre duas categorias de provas: empíricas e teóricas, elaboradas por um grupo de professores que ensinam Matemática na rede pública do município de Sinop/MT. Destacamos que, para produção e análise dos dados, buscou-se uma aproximação metodológica com a Engenharia Didática de Artigue (1996) com a produção dos dados realizada no ambiente de um curso de extensão desenvolvido com professores de Matemática, por meio da aplicação de um conjunto de atividades previamente selecionadas que visavam à construção de propostas de trabalho para explorar a produção de provas empíricas e teóricas.

No trabalho, assumimos como provas empíricas todas aquelas produzidas em um processo que vise à constatação da verdade, que pode ser convencimento próprio ou comunitário, de uma dada propriedade cuja argumentação elaborada se apoia no manuseio de materiais manipuláveis, na construção, na comparação sobre desenhos ou manipulação de figuras, inclusive em *softwares* de computador, ou seja, que têm como motor principal um modelo de experimentação.

Por outro lado, como provas teóricas, assumimos as que visam à constatação da verdade de uma proposição por meio de uma argumentação do ponto de vista matemático, ou seja, pautada em conceitos e proposições, e baseada na estrutura de um discurso dedutivo. Apesar de nem todas as provas produzidas pelos professores, utilizarem o encadeamento lógico aceito pela comunidade matemática, de modo geral, nesse processo de elaboração, eles explicitavam a intenção de produzirem esse tipo de prova, mas muitas vezes suas produções apresentavam equívocos conceituais e não alcançavam a formulação matemática necessária para tal classificação. Dessa forma, o que observamos foram tentativas malsucedidas de elaboração de provas matemáticas se apoiando no que haviam constatado empiricamente e tentando empregar elementos teóricos da matemática. Pelo emprego destes elementos, mesmo que de forma embrionária, é que estamos chamando-as de provas teóricas.

Neste trabalho, investigamos a articulação dessas duas categorias de provas produzidas pelos professores sujeitos da pesquisa, por meio de um enfoque teórico alicerçado na Teoria de Raymond Duval, analisando os principais registros de representações semióticas mobilizados pelos professores em suas produções durante o curso de extensão. Assim, observando os registros utilizados em cada categoria de prova, buscamos identificar a possibilidade de se explorar as provas empíricas e teóricas no contexto da sala de aula, por meio de um trabalho multirregistro, tido como fundamental no modelo teórico proposto por Duval. Sobre este modelo teórico, apresentamos alguns de seus elementos na seção seguinte deste artigo.

## Elementos da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval

Raymond Duval é um pesquisador francês que tem realizado pesquisas em Psicologia Cognitiva desde os anos de 1970. Filósofo e psicólogo de formação, Duval desenvolveu suas primeiras pesquisas entre 1970 e 1995 no Instituto de Pesquisas sobre o Ensino de Matemática (IREM, sigla abreviada da expressão original em francês: *Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques*) de Estrasburgo, na França. Atualmente é professor emérito em Ciências da Educação da *Université Du littoral Côte d'Opale*, localizada na cidade de *Boulogne-sur-Mer*, na França.

Duval é mundialmente conhecido por seu modelo teórico dos Registros de Representação Semiótica. A utilização dessa teoria em pesquisas na área de educação matemática tem crescido significativamente nas últimas décadas no Brasil, como podemos observar em Colombo, Flores e Moretti (2008) e Brandt e Moretti (2014). Um fator de destaque da teoria é o seu potencial para lidar com problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem em matemática. Segundo Almouloud (2007, p. 72), ao se referir à teoria de Duval, "falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que poderá ajudá-lo a tornar mais acessível a compreensão da Matemática.

De modo geral, podemos dizer que o modelo teórico propõe uma abordagem cognitiva dos processos de ensino e aprendizagem em matemática, buscando descrever o funcionamento cognitivo que possibilita sua aprendizagem. Duval pondera que os sistemas cognitivos envolvidos na aprendizagem em matemática trazem em si especificidades próprias, as quais não são descritas por teorias gerais de cognição.

Para Duval, "a análise do conhecimento centra-se sobre os modos pelos quais temos acesso aos próprios objetos" (DUVAL, 2011, p. 19). Dessa forma, uma das especificidades que diferenciam a atividade cognitiva em matemática da atividade cognitiva em outras áreas é o fato de "na matemática, diferentemente de outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente" (DUVAL, 2003, p. 21). Assim, sempre necessitamos de uma atividade semiótica, como destaca Duval (2013, p. 15) "Os números, as funções, as relações geométricas, ou seja, os objetos matemáticos. Para termos acesso a esses objetos, precisamos de uma atividade de produção semiótica". Ou seja, é uma atividade semiótica que proporciona, em matemática, desenvolver um conceito, e não o contrário, assim a atividade semiótica não é utilizada em matemática apenas como meio de comunicação desse saber.

Dessa forma, um grande destaque é atribuído às representações semióticas, inclusive na Geometria, pois segundo Duval (2014, p. 37), "o modo de acesso aos objetos matemáticos, mesmo em Geometria, não é jamais empírico, é semiótico, o que não quer dizer teórico". Essa importância é realçada, segundo Duval, pelo fato de sistemas de representações diferentes oferecerem mais ou menos possibilidades de tratamento matemático (DUVAL, 2003, 2009, 2011, 2012).

Assumir a importância das representações semióticas frente à atividade cognitiva, segundo Duval (2003, 2009, 2011, 2012), nos conduz a atribuir significativa importância à grande variedade de representações semióticas na atividade cognitiva em Matemática. “Além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a linguagem natural” (DUVAL, 2003, p. 14), que representam diferentes registros de representação, frequentemente utilizados nas atividades matemáticas.

Muitas vezes, apesar de reconhecermos a diversidade de representações possíveis, principalmente na atividade de ensino, não lhe damos o devido valor, conforme alerta o autor: “ainda que a existência de várias representações não seja contestada por ninguém, sua importância para a descrição e para a explicação de processos cognitivos é muito frequentemente negligenciada” (DUVAL, 2009, p.48), especialmente pela pouca valorização deles durante o ensino.

Entre os sistemas semióticos existentes e utilizáveis na Matemática, a teoria de Duval discute e tem como foco de estudo os sistemas que o autor chama de registros, conforme ele próprio destaca:

> Um registro é, evidentemente, um sistema semiótico, mas um sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como sistema formal. Ele se caracteriza essencialmente pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar (DUVAL, 2011, p. 70).

Entre os inúmeros sistemas semióticos existentes, os que o autor chama de registros de representação semiótica são os que permitem três atividades cognitivas fundamentais, a saber: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. Contudo, Duval destaca que nem todos os sistemas semióticos permitem essas três atividades cognitivas, por exemplo, o código Morse não as permite, o qual representa os caracteres através de pontos e traços, correspondendo estes a impulsos elétricos e resultando daí sinais acústicos ou luminosos de uma certa duração. “Mas a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas, etc. permitem essas atividades” (DUVAL, 2009, p. 37), constituindo-se sistemas com regras próprias e ganham então o estatuto de registro.

Essas três atividades atribuem aos registros sua principal diferença em relação aos códigos, a saber, “os registros são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo ‘criadores’ de representações sempre novas. E a criação de novas representações permite descobrir novos objetos” (DUVAL, 2011, p. 72). Ao contrário, o autor esclarece que os códigos são sistemas que permitem apenas transferir uma informação. Segundo os conceitos do autor, cada uma dessas três atividades cognitivas fundamentais pode ser caracterizada como segue:

**Formação de representação semiótica**: Caracteriza-se pela possibilidade ofertada pelo sistema semiótico de identificação do objeto (matemático) representado. Duval (2009, p. 55) apresenta o que classifica como atos elementares de formação:

> Os atos mais elementares de formação são, conforme o registro, a designação nominal do objeto, a reprodução de seu contorno percebido, a codificação de relações ou de certas propriedades de um movimento. Naturalmente esses atos mais elementares têm apenas interesse na medida a quem as representações assim formadas são, implicitamente ou explicitamente, articuladas nas representações de ordem superior: frase, imagem, esquema, quadro.

**Tratamento de representação semiótica**: Caracteriza-se pela transformação de um registro de representação interna ao próprio registro no qual ela foi formada. Como exemplos de tratamentos, Duval (2012, p. 272) destaca:

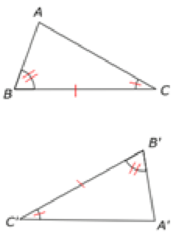
> A paráfrase e a inferência são formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras o seu papel heurístico.

Dito assim, as regras de tratamento devem ser regras que, quando utilizadas sobre um determinado registro, obtenha-se uma representação nesse mesmo registro. Assim sendo, essas regras variam de um registro a outro, além de muitas vezes serem regras próprias de cada registro (DUVAL, 2009; 2012).

Importante destacar também que “o que é matematicamente essencial em uma representação semiótica são as transformações que se podem fazer, e não a própria representação” (DUVAL, 2011, p. 68). Isso porque cada tipo de representação semiótica oferece diferentes formas de tratamentos, ou seja, não oferece as mesmas possibilidades internas de transformação, mesmo representando os mesmos objetos. Isso nos leva, durante um trabalho com a Matemática, a ter que saber, “escolher”, qual registro propicia melhor possibilidade de tratamento. No caso da Geometria, foco especial do nosso trabalho, ganham destaque os tratamentos operados sobre as figuras.

**Conversões de representações semióticas**: A conversão, diferentemente do tratamento, caracteriza-se por uma transformação externa à representação semiótica de partida. Segundo Duval (2009, p. 58), “converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou dessa mesma informação num outro registro”.

Para exemplificar algumas possibilidades de conversão de representação em Geometria, apresentamos no quadro a seguir o caso de congruência Ângulo-Lado-Ângulo (ALA) em três representações diferentes.

| **Representação em linguagem natural** | **Representação figural** | **Representação em linguagem simbólica** |
|---|---|---|
| Se dois triângulos ABC e A’B’C’ possuem ordenadamente congruentes um lado e os ângulos adjacentes a esse lado, então esses triângulos são congruentes. |  | $\left.\begin{array}{r}\hat{B} \equiv \hat{B}' \\ BC \equiv B'C' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ |

Quadro 1: Diferentes representações para o caso de congruência ALA
Fonte: Duval (2009).

É fato a ser destacado que, na conversão, os objetos de um sistema de representação não necessitam conseguir representar todos os objetos representados pelo outro sistema de representação (sistema original em que se operam as conversões). De modo geral, quando efetuamos uma conversão de uma representação em um registro para outra representação em outro registro, isso não implica que tudo de um registro irá transparecer no outro registro. Mas, conforme Duval destaca, os registros devem guardar o essencial de cada representação, pois, como ocorre no Quadro 1, nem todos os elementos destacados na representação no registro em linguagem natural transparece na representação figural, como a implicação por exemplo, mas os elementos essenciais transparecem (triângulos, lados e ângulos congruentes).

Sendo dado a dois grupos de alunos o enunciado em linguagem natural, como no Quadro 1, e sendo solicitada a construção figural, possivelmente cada grupo irá apresentar representações que não seriam exatamente iguais: triângulos de tamanhos diferentes, posições de ângulos e lados diferentes, entre outros, mas o essencial de cada representação ainda assim deverá transparecer.

Posto assim, sobressai que a articulação, entre os registros, torna-se a chave para a aprendizagem em Matemática. Isso porque, conforme destaca Duval (2003, p. 22), a mudança de um registro de representação a outro requer muito mais do que apenas mudar o modo de tratamento, requer "também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto produzido". Conforme o próprio autor destaca:

> O recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidas em cada uma de suas representações. A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece fundamentalmente para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis (DUVAL, 2012, p. 270).

São exatamente as duas condições relatadas no final da citação que, para o autor, dão acesso aos objetos matemáticos. O objeto matemático, de fato, passa a não ser confundido quando somos capazes de reconhecê-lo em mais de uma representação, pois, como é dado "ser capaz de reconhecer o mesmo objeto em duas representações semióticas diferentes implica que, se uma só é dada, é possível espontaneamente convertê-la em outra e mesmo em uma terceira" (DUVAL, 2012b, p. 311). É nesse sentido que, para o autor, a originalidade da atividade cognitiva em Matemática está na capacidade de mobilização de, ao menos, dois registros de representação semiótica.

Devemos assim, frente a situações de ensino, levar em consideração que "as produções podem então se limitar a um só registro de representação, mas o funcionamento cognitivo que os comanda se situa em um campo mais largo e mais diversificado de representações" (DUVAL, 2009, p. 91-92). Dessa forma, torna-se importante na prática do ensino de Matemática visar trabalhos que favorecem a articulação de diferentes registros de representação semiótica. Por isso, julgamos como importante conhecer os diferentes registros mobilizados na construção de provas empíricas e teóricas, no que tange a Geometria, em propostas de trabalhos elaboradas por educadores matemáticos, assim como fazemos no presente trabalho.

## Aspectos metodológicos

Como já adiantamos na introdução deste artigo, a metodologia adotada buscou uma aproximação com a Engenharia Didática de Artigue (1996). Aproximação no sentido de que tínhamos em mente as quatro fases que compõem a Engenharia Didática:

fase das análises prévias, fase das concepções e das análises *a priori,* fase da experimentação, fase da análise *a posteriori* e validação. Porém, para a pesquisa, algumas dessas fases foram estruturadas com alterações em relação aos pressupostos da Engenharia Didática, mas mantendo algumas configurações ditadas por essa metodologia, para detalhamento das alterações, sugerimos consultar Trevisan (2016).

Quanto à produção dos dados propriamente dita, ela se deu no ambiente de um curso de extensão ofertado a um conjunto de doze professores de Matemática, sendo todos professores da rede pública estadual de Mato Grosso, atuantes em escolas no município de Sinop. Os dados foram produzidos a partir da aplicação de um conjunto de nove atividades previamente selecionadas, que visavam à produção de propostas de trabalho para explorar provas empíricas e teóricas. Tais produções foram realizadas em trios pelos professores, os quais receberam, na análise, um nome fictício com duas letras e um número (exemplo: P1E): o número indica o trio pertencente (trio 1, no exemplo dado), a letra P faz menção à palavra Professor e a última letra é aleatória ("E", no exemplo dado), permitindo a identificação do professor por parte dos pesquisadores.

Cada atividade explorava uma propriedade geométrica cuja demonstração poderia ser feita utilizando os casos de congruência de triângulos. No enunciado das atividades, um grupo delas apresentava apenas o registro em linguagem natural e outro grupo apresentava também o registro figural, condizente com o enunciado em linguagem natural. Frente a cada atividade, os professores foram convidados a elaborar uma solução empírica e uma solução teórica para a mesma e relatar como tal solução poderia ser explorada em sala de aula. Todo o material produzido foi recolhido, constituindo-se nos dados analisados, juntamente com registros audiovisuais coletados durante o curso. Um dos elementos analisados diz respeito à utilização de diferentes registros de representação semiótica em cada categoria de provas elaboradas pelos professores, cujos resultados das análises passamos a apresentar e discutir na próxima seção do artigo.

## A mobilização dos registros de representação nas validações empíricas e teóricas

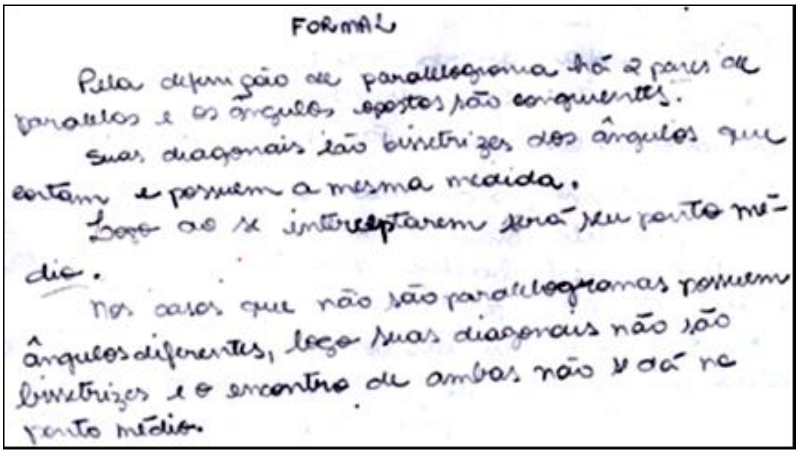
Ao analisar os dados, observamos que nas soluções propostas foram mobilizados basicamente três registros: o simbólico, o registro em língua natural e o registro figural, aproximando-se das constatações de algumas pesquisas que investigaram a construção de provas em Geometria, como a de Almouloud (2003, p. 146-147), que destaca a coordenação de registros frente às atividades geométricas. As atividades ali estudadas, segundo o autor:

> Enfatizam três registros de representação e suas coordenações: o registro discursivo, o registro das figuras e o registro matemático (ou das escritas algébricas). As conversões e coordenações desses registros colaboram na compreensão de problemas e no processo de aprendizagem dos conceitos geométricos.

Porém, quando olhamos para as especificidades de cada categoria de provas, empíricas e teóricas, produzidas pelos sujeitos da pesquisa, aparece de forma clara uma valorização no emprego de diferentes registros em cada categoria de provas produzidas. Observamos que as provas teóricas exploravam mais o registro em linguagem natural, enquanto que as provas empíricas produzidas exploravam mais o registro figural.

Nas provas teóricas produzidas, a valorização do emprego do registro em linguagem natural condiz com a estrutura própria do discurso dedutivo, que é o mais utilizado na elaboração de demonstrações matemáticas como destacam Duval e Egret (1989). Porém, o que observamos foi que algumas delas ficaram mais próximas de uma descrição do que de uma dedução matemática, em especial as primeiras que foram produzidas, o que é ilustrado pela Figura 01, que apresenta uma solução teórica apresentada para a propriedade conhecida como Teorema da Base Média de um Triângulo, que afirma que dado um triângulo qualquer, o segmento de reta que liga quaisquer dois pontos médios sobre os lados do triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem comprimento igual à metade deste terceiro lado.

Observando a prova teórica apresentada na Figura 01, que apesar de não apresentar uma demonstração correta do ponto de vista matemático, permite uma análise quanto aos registros utilizados. Como podemos perceber, a prova contém somente a descrição em linguagem natural, nenhuma representação simbólica é apresentada, assim como não é explorada a representação figural nesta prova. A prova elaborada apresenta equívocos conceituais, pois afirmar que as diagonais de um paralelogramo são bissetrizes dos ângulos não é correto, o que leva o trio a confundir esta propriedade com a da diagonal de um paralelogramo se interceptar no ponto médio de ambas.


FORMAL

Pela definição de paralelogramo há 2 pares de paralelos e os ângulos opostos são congruentes.

Suas diagonais são bissetrizes dos ângulos que contém e possuem a mesma medida.

Logo ao se interceptarem será seu ponto médio.

Nos casos que não são paralelogramos possuem ângulos diferentes, logo suas diagonais não são bissetrizes e o encontro de ambas não se dá no ponto médio.

Figura 01: Validação teórica apresentada pelo trio 1 na atividade 2 em 09/05/2015.
Fonte: Próprios autores.

Muitas provas teóricas foram elaboradas com esta característica da não presença da representação figural. Alguns trios até utilizaram a representação de figuras que acompanhavam o enunciado ou outras elaboradas por eles durante a exploração da atividade, mas no material final produzido eram omitidas, indicando assim a não importância desta representação frente a essa categoria de provas.

Em algumas provas produzidas, juntamente com a representação em linguagem natural, utilizou-se de representação figural e simbólica. Nelas, o registro simbólico era utilizado para substituir ou fazer referência a alguns elementos, geralmente elementos geométricos. A Figura 02 ilustra este tipo de prova produzida.

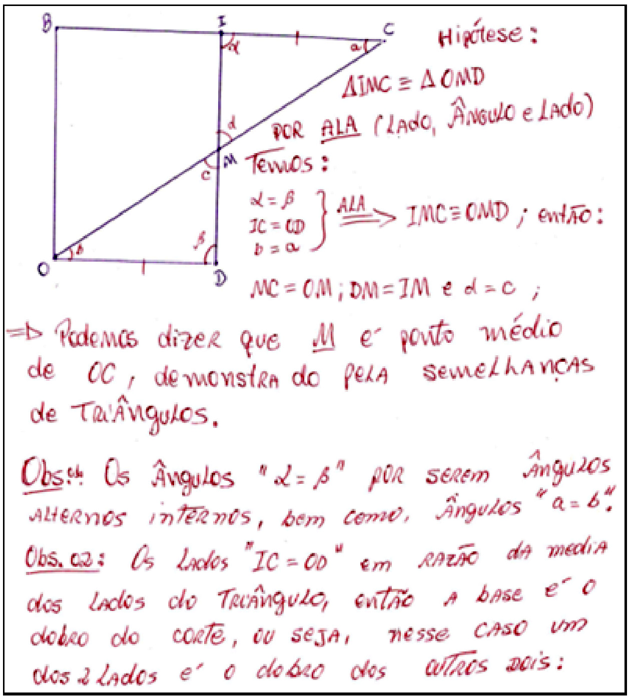



Figura 02: Validação teórica apresentada pelo trio 3 em 22/08/2015
Fonte: Próprios autores.

Como observamos, apesar da presença da representação simbólica e da figural na prova produzida, a maior parte dela progride em linguagem natural, principalmente nas explicações dadas nas observações, em que se busca explicar alguns elementos adotados ao se utilizar do registro simbólico. O que destacamos é que, em ambos os exemplos apresentados, a sustentação da validação da proposição se apoia mais fortemente no registro da língua natural.

Assim, nas provas teóricas produzidas, o que se observou foi um movimento que parte do registro em linguagem natural, contido nos enunciados das atividades, para a realização efetiva do trabalho de validação também em linguagem natural, algumas vezes com apoio de representações simbólicas e representações figurais. Percebe-se que este caminho se deu sempre em sentido único, preocupando-se com a conversão de representações de um registro para outro e não em criar possibilidades de conversão em sentido inverso.

Nas provas empíricas, como já antecipamos, observamos uma maior valorização do trabalho com o registro figural. Neste, a validação geralmente se deu por meio de tratamentos da representação figural (manipulação da figura). Ou seja, buscava-se uma conversão passando do enunciado em linguagem natural para uma representação figural em que o tratamento era, então, empregado. Na maioria dos casos, o tratamento foi feito pelo uso da reconfiguração figural, geralmente buscando uma comparação entre medidas.

Nesta categoria de provas, de forma geral, desde o início os grupos mostravam-se interessados em apresentar ou elaborar uma maneira de trabalhar com a atividade dada na sala de aula. Nas teóricas, por sua vez, sempre foi apresentada apenas uma solução, sem propor algum possível encaminhamento para exploração no contexto da sala de aula. Este movimento de elaborar uma proposta de trabalho para a sala de aula levou os professores a converterem as informações dadas nos enunciados, geralmente em linguagem natural e, algumas vezes, figural, para um tipo de sequência de trabalho também fortemente descritivo e utilizando-se da linguagem natural, como podemos ver na Figura 03.

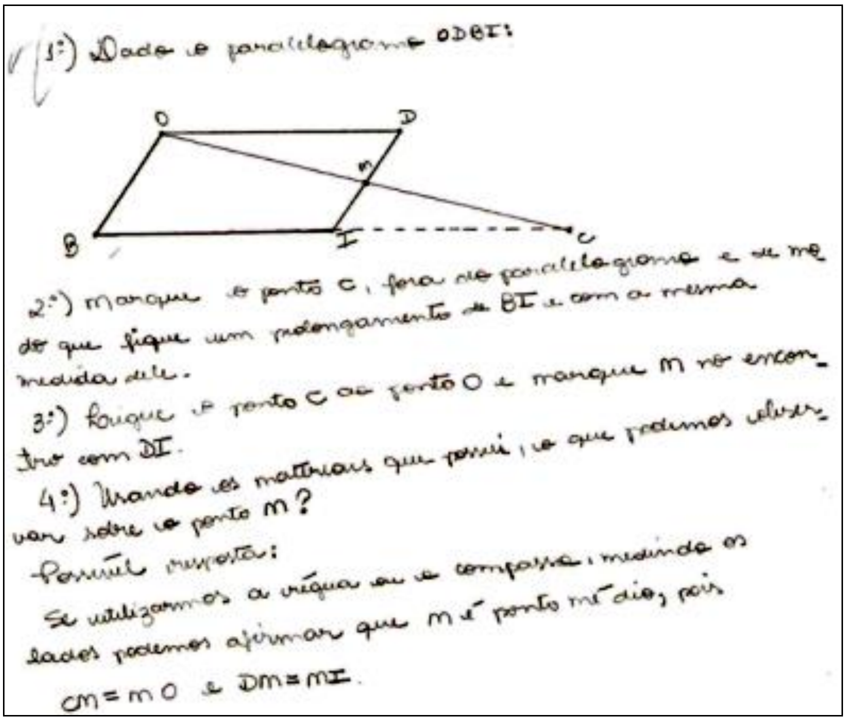



Figura 03 - Encaminhamento da validação empírica apresentada pelo trio 1 em 22/08/2015
Fonte: Próprios autores.

Nessa prova apresentada pelos professores, observa-se a valorização da validação empírica, por meio do uso da régua ou do compasso para verificar as igualdades, porém sem sequer mencionar antes que, na construção realizada, os triângulos ODM e CIM são congruentes, o que levaria a explorar propriedades matemáticas na construção.

Essa forma de apresentação sequencial, adotada pelo trio para as atividades empíricas como destacado na Figura 3, leva os alunos, na construção, a trabalharem com a apreensão sequencial, o que condiz com muitas formas de trabalhos encontradas em materiais didáticos, como é o caso de alguns livros didáticos. Também corrobora com o que Duval (2012c, p. 120) já afirmava sobre a apreensão sequencial e destacava: “as orientações didáticas destes últimos anos concederam certa importância a estas atividades”.  Esse modo de apresentar as atividades se manteve do início ao final do curso.

A maioria seguiu a ideia de apresentar uma sequência de construção e posterior validação pela manipulação da figura, como ilustra a Figura 03. Porém, para algumas atividades, alguns trios (a minoria, dois trios em duas atividades) se utilizaram da validação empírica baseada na comparação numérica, mas também se apoiando na representação figural para obtenção destes dados numéricos, ou seja, ainda prevalecendo a exploração da representação figural.

Contudo, nem sempre sobressaiu a intenção de deixar a cargo do aluno a realização das construções frente aos encaminhamentos para as provas empíricas. Em geral, quando tal construção foi evitada, isso se deu não por dificuldades da atividade, mas sim por uma preocupação em facilitar o trabalho do aluno e a forma de realizar as construções, como é destacado no fragmento de diálogo em resposta à pergunta durante explicação interna do trio 3, em 09/05/2015:

> Pesquisador**:** No enunciado para propor o trabalho em sala de aula, vocês acham que seria melhor trazer a figura pronta ou propor a construção? [...]
>
> PM3**:** [na sequência da fala do PP3]: Nossa dificuldade é a seguinte, quando você pede para o aluno: me faz, por exemplo, um retângulo, um quadrado ou um triângulo, tem alguns alunos que vão construir a figura em um tamanho bom; outros, grande demais; outros tão pequenos que fica difícil de manipular, então se estão tendo um primeiro contato com esse tipo de construção, seria bom que já levasse pronto.

O fato de não deixar a cargo do aluno a construção figural claramente implica na perda da possibilidade de propiciar, com a atividade, o desenvolvimento de elementos importantes para a aprendizagem matemática. Do ponto de vista cognitivo, minimiza a necessidade de conversão de registros na passagem da linguagem natural para a figural, uma vez que o trabalho fica restrito à exploração da figura já recebida pronta.

Na maioria das propostas de trabalho para exploração em sala de aula realizada pelos trios, o que evidenciamos quanto à mobilização dos registros é a necessidade de uma conversão da representação em linguagem natural, presente nas apresentações sequenciais elaboradas, para uma representação figural. Algumas construções, para ilustrar a forma que pretendiam propor aos alunos, foram realizadas pelos trios, das quais destacamos algumas na Figura 04 e, como podemos observar, se dão sobre a exploração do registro figural utilizando materiais manipuláveis. Essa exploração via registros figurais com materiais manipuláveis foi predominante nas atividades.

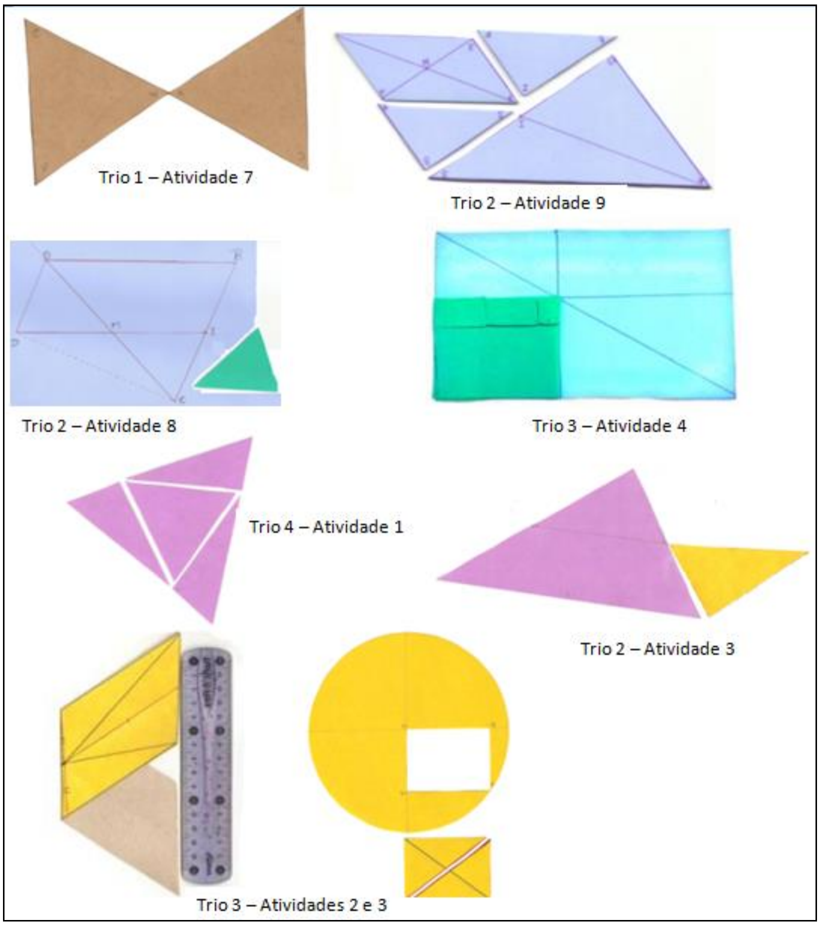



Figura 4: Alguns materiais para as validações empíricas produzidos pelos professores
Fonte: Próprios autores.

Somente para uma atividade nenhum grupo propôs ou realizou algum tipo de construção como comprovação empírica da validade da proposição em estudo na atividade. Nessa atividade, a maioria dos grupos explorou a propriedade por meio do desenho de vários quadriláteros, ou seja, ainda assim ganhou destaque o registro figural na validação proposta.

Nessas atividades, do ponto de vista da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, destaca-se o fato de que, depois de explorar uma conversão do registro em linguagem natural para a representação figural dada nas construções, a investigação ou validação da propriedade em questão é dada, geralmente, via tratamento figural, explorando uma reconfiguração para comparar partes da figura. A atividade de tratamento também é fundamental para a aprendizagem, mas do ponto de vista cognitivo, "é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática" (DUVAL, 2003, p. 22). Ou seja, mais importante que o tratamento, do ponto de vista desta teoria, é a atividade de conversão entre os diferentes registros.

Nas atividades trabalhadas, percebemos a articulação distinta dos registros em cada categoria de provas. Nas provas teóricas, observamos a passagem dos enunciados em linguagem natural contendo figuras para a representação figural, a simbólica e, principalmente, a linguagem natural utilizada para sustentação da validação apresentada. Nas provas empíricas, foi observada a passagem da linguagem natural da sequência de construção para representação figural onde as validações se sustentaram. Observamos que o trabalho em conjunto com essas duas categorias de provas, empíricas e teóricas, constitui uma forma de valorizar a articulação entre diversos registros de representação, em especial na sustentação das validações produzidas.

Em forma de diagrama, a mobilização dos registros utilizada na sustentação das validações encontradas na pesquisa frente a este conjunto de atividades pode ser representada como na Figura 05. As setas duplas, destacadas de vermelho, simbolizam a articulação necessária entre essas duas categorias de provas para potencializar a articulação de diferentes registros. Contudo no cenário da pesquisa, essa articulação não foi sempre estabelecida pelos professores.

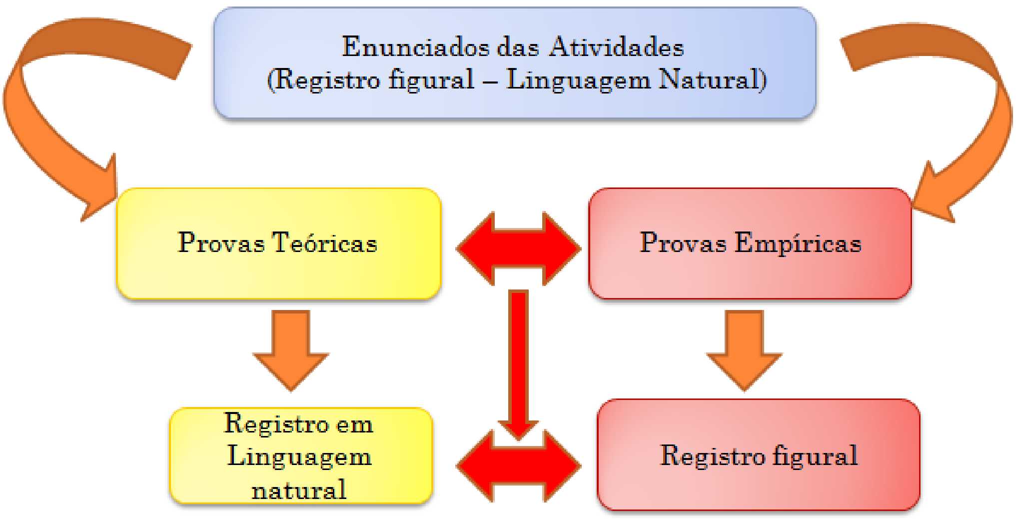



Figura 05: Diagrama da mobilização dos registros nas duas categorias de provas.
Fonte: Próprios autores.

Além disso, como o diagrama apresentado na Figura 05 sugere, é o trabalho em conjunto com essas duas categorias que possibilita partir de um registro em linguagem natural, trabalhar com o registro figural e novamente retornar ao registro em linguagem natural, ou seja, possibilita sair de um registro e voltar a este mesmo registro, trabalhando com conversões em sentidos contrários, contornando uma prática equivocada e denunciada por Duval (2003, p. 20) de que "no ensino, um sentido de conversão é privilegiado", quando segundo o próprio autor, "nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada" (Ibidem, p. 20).

É essencial para a aprendizagem em Geometria utilizar-se de um trabalho que valorize a articulação entre o registro figural e a linguagem natural e os possíveis tratamentos oferecidos por cada registro, pois como destacam Kluppel e Brandt (2014, p. 120):

> A necessidade de coordenação entre os tratamentos em dois registros (figurais e discursivos) contraria o que se pratica espontaneamente e, ainda, exige uma aprendizagem separada das operações demandadas em cada um destes registros, constituindo, dessa forma, as condições necessárias para a aprendizagem da Geometria.

Mas o que constatamos nas produções realizadas no curso é um movimento contrário à valorização do trabalho com vários registros, em especial pela falta de busca da articulação entre essas duas categorias de provas. A própria opção pelo encaminhamento das provas empíricas utilizando o registro figural por meio da exploração de materiais manipuláveis já denuncia o distanciamento entre as duas categorias, pois segundo observação de Moran (2015, p. 227): "Com o uso do Material Manipulável, observou-se certa distância entre a possibilidade de tratamento a ser realizado na figura e o raciocínio dedutivo que poderia ser expresso por meio da língua formal". Ou seja, a exploração das provas empíricas via utilização de materiais manipuláveis mostrou-se na pesquisa de Moran (2015) como um elemento que não favorece a passagem da exploração com materiais manipuláveis para o raciocínio dedutivo e consequentemente a construção de uma demonstração matemática que se apoia nesse tipo de raciocínio.

Também em nossa pesquisa encontramos os professores valorizando as provas empíricas encaminhadas via exploração de materiais manipuláveis mais que qualquer outro tipo de abordagem, tais como uso de computadores e *softwares* de geometria dinâmica, ou mesmo construções gráficas. Observamos que este fato também contribuiu para dificultar a aproximação entre as categorias de provas empíricas e teóricas, o que acaba, em um cenário de ensino, comprometendo um trabalho que vise uma maior manipulação de registros, e assim, segundo a teoria dos Registros de Representações Semióticas, poderia proporcionar momentos de aprendizagem mais expressivos para as propriedades exploradas.

## Conclusões

A teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval, como vimos, pode fornecer importantes subsídios para o trabalho visando à compreensão de processos relacionados à aprendizagem matemática do ponto de vista cognitivo. Na pesquisa realizada, essa teoria mostrou-se importante para a compreensão de conceitos e propriedades inerentes às atividades propostas e que estão presentes no desafio de ensinar Matemática em qualquer nível de ensino e sem distinção de conteúdos, geométricos, algébricos ou numéricos.

No alicerce da teoria, está a possibilidade e a necessidade matemática de se trabalhar com múltiplos registros de representação para os diversos conteúdos matemáticos. Aqui, ao olharmos para a Geometria, especialmente as construções das provas empíricas e teóricas, visando investigar os registros que dão sustentação neste trabalho de validação, observamos que registros distintos foram explorados em cada categoria de prova: nas teóricas, o registro em linguagem natural, dado pela busca de uma produção dedutiva discursiva; e nas empíricas, o registro figural, presente nos materiais manipuláveis confeccionados pelos professores.

Diante dos distintos registros mobilizados, fica clara a importância de não buscar um ensino que vise priorizar apenas uma categoria de provas. O ensino da Geometria, quando pensado em incluir os processos de validação, não deve centrar sua exploração apenas nas demonstrações formais, como já ocorreu em tempos passados, assim como não deve ser pensada apenas com a abordagem empírica, de tentativa e erro, comparação, experimentação e simples manipulação de materiais, sem uma articulação teórica com abordagem de propriedades e conceitos matemáticos, como muitas vezes tem ocorrido. O desafio é tentar buscar um equilíbrio entre os elementos empíricos e teóricos.

Um meio que defendemos para tal é a busca de se caminhar das provas empíricas visando às provas teóricas. Fazendo assim um balanço, visando ao equilíbrio entre essas duas categorias de provas, e assim, como os dados produzidos nos mostram, tenderemos também a dispor de um sistema que privilegie uma utilização mais diversificada de registros de representação, bem como um caminhar em duplo sentido na conversão desses registros, contribuindo para um ensino mais significativo do ponto de vista da Teoria dos Registros de Representações Semióticas.

Contudo, para favorecer esta aproximação entre estas duas categorias de provas em um cenário de ensino, faz-se essencial não limitar a exploração empírica de atividades com materiais manipuláveis. Estes podem ser utilizados no início, para se conjecturar sobre a veracidade de proposição em estudo, mas precisa ser alicerçado por outros elementos empíricos, como o uso de *softwares* matemáticos, que favorecem mais possibilidades de aproximação dos elementos empíricos passíveis de manipulação e dos elementos teóricos matemáticos. Assim, uma maior aproximação entre as categorias de provas irá implicar uma maior mobilização de registros no cenário de ensino.

## Referências

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, p. 193-217, 1996.

ALMOULOUD, S. A. Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

______. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba, Editora UFPR, 2007.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. O cenário das pesquisas no campo da educação matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Perspectivas da Educação Matemática,** Mato Grosso, v. 7, n. 13, p. 22-37, 2014.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R. & MORETTI M. T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Revista ZETETIKÉ**, Campinas, v. 16, n. 29, p. 41-72, jan./jun. 2008.

DUVAL, R.; EGRET M. A. L'organisation Deductive du Discours: interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la demonstration. In: Didactique et de Sciences Cognitives, 1989, **Annales**..., Strasbourg, Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, 1989, p. 25-40.

DUVAL, R. Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D A. (Org.) **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Editora Papirus, 2003. p. 11-33.

______. **Semiose e pensamento humano**: registro de representação semiótica e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): (facículo I). Tradução: Lênio F. Ley e Marisa R. A. da Silveira. São Paulo: Editora da Física, 2009.

______. **Ver e ensinar Matemática de outra forma, entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves dias. São Paulo: Editora PROEM, 1ª ed., 2011.

______. Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT**: Florianópolis. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012.

______. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da Matemática? **Práxis Educativa**: Ponta Grossa. Tradução: Luciana da Costa. v.7, n. 2, p. 305-330, 2012b.

______. Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. **REVEMAT**: Florianópolis. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. v. 07, n. 1, p. 118-138, 2012c.

______. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**: Campo Mourão. Entrevista realizada por José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Resende. v. 2, n. 3, jul./dez. 2013.

______. Rupturas e Omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em Geometria. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Org.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática.** Ijuí: Editora Unijuí, p. 15-38, 2014.

KLUPPEL, G. T.; BRANDT, C. F. Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval. In BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Org.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Editora Unijuí, p. 113-134, 2014.

MORAN, M. **As apreensões em geometria**: um estudo com professores da Educação Básica acerca de registros figurais. 2015, 248 f. Tese (Doutorado em

Educação para a Ciências e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

TREVISAN, E. P. **Um estudo sobre a Articulação entre validações empíricas e teóricas no ensino de Geometria com professores da rede pública**. 2016, 257 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2016.