

Software Geogebra: uma ferramenta na prática docente para o ensino dos números complexos no ensino médio

Geogebra Software: a tool in teaching practice for the teaching of complex numbers in high school

Isabel do Socorro Lobato Beltrão

Universidade do Estado do Amazonas
ysabelobato@hotmail.com

.....

Cláudio Barros Vítor

Universidade do Estado do Amazonas
cvitor77@bol.com.br

.....

Ierecê dos Santos Barbosa

Universidade do Estado do Amazonas
ierecebarbosa@yahoo.com.br

Resumo

Neste trabalho, descrevemos resultados de um estudo sobre utilização do *software* Geogebra como ferramenta auxiliar do professor no ensino dos números complexos. Os dados foram coletados a partir do desenvolvimento de atividades na disciplina Matemática, oferecida a alunos do 3º ano do Ensino Médio numa escola pública de Parintins/Amazonas. Teve objetivo estimular a aprendizagem dos estudantes em relação à conceitos matemáticos, plano de *Argand Gauss* e demonstrações dos complexos. Os resultados indicam necessidade de utilização dos softwares matemáticos de forma contínua nas aulas, como forma de ensinar conteúdos numa lógica que integre teoria e prática no ensino. A utilização do Geogebra possibilitou ao aluno o uso de estratégias, levando-o a se envolver nas aplicações matemáticas, desenvolvendo e aprimorando habilidades do raciocínio lógico e ao professor, oportunidade de criar ambiente de aula em que a comunicação foi benéfica, propiciando momentos de interação, trocas de experiências e discussões.

Palavras-chave: Práticas docentes. Tecnologia. Números complexos. Geogebra.

Abstract

In this present study it is described the results on the use of Geogebra Software as a teacher's auxiliary tool, to teach complex numbers. The data were collected from the development of activities in the Mathematics studies, offered to students of the 3rd grade of High School in a public school, in Parintins/Amazonas. Those data aimed to stimulate students' learning in relation to mathematical concepts, Argand Gauss' plan and demonstrations of the mathematical complexes. The results could indicate the

need to use mathematical softwares in classes continuously, as a way to teach contents in a logic, which could integrate theory and practice. The use of Geogebra enabled the student to use strategies, leading him to become involved in mathematical applications, developing and improving logical reasoning skills. Also, the teacher's opportunity to create a learning environment in which communication was beneficial, providing moments of interaction, exchanges of experiences and discussions.

Key words: Teaching practices. Technology. Complex numbers. Geogebra.

Introdução

Na sociedade atual, se eu ou você precisássemos aprender algo novo, provavelmente entraríamos na internet, consultaríamos o *Google*, *Wikipédia* ou faríamos buscas de especialistas e outros recursos. A tecnologia nos dá a internet, com seus materiais, livros de domínio público, uma miríade de recursos que podem nos ajudar a encontrar soluções de alguns problemas. No processo educacional, o desafio real é dar acesso equitativo à tecnologia para todos os alunos como uma possibilidade de melhorar suas habilidades, em fazer bom uso deste acesso para uma educação de qualidade.

A partir da compreensão de que a tecnologia pode contribuir no processo ensino-aprendizagem tanto dos professores quanto dos alunos, apresentamos neste trabalho os resultados de um estudo que utilizou o *software* Geogebra como ferramenta auxiliar na prática do professor de matemática no ensino de números complexos no Ensino Médio por meio de exercícios desenvolvidos com a assistência do referido *software*.

A proposta de usar o Geogebra na prática docente para estudo dos números complexos, surge da ideia de associar o conhecimento prévio de informática na introdução desses números, propiciando uma abordagem visual de conceitos abstratos que muitas vezes são trabalhados de forma superficial e mecânica, de modo a tornar o estudo desse conteúdo sem importância para os alunos. Nesse sentido, a abordagem dos complexos não pode ser vista como um tema isolado da resolução de equações de modo a perder o sentido para os alunos que não continuarão seus estudos na matemática, logo, o referido tema pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas (BRASIL, 2002).

No contexto escolar, o uso do Geogebra poderá contribuir para a compreensão dos alunos no que tange as operações que envolvem números complexos tanto no plano de *Argand Gauss* quanto na visualização de vetores, permitindo de forma dinâmica e mais efetiva que se compreenda a lógica matemática dos processos que ocorrem quando resolvemos tais operações de forma visualizada.

Assim, a proposta de utilização do Geogebra nas aulas de matemática no Ensino Médio objetivou dinamizar o estudo desses números, visto que, através da visualização proporcionada pelo *software*, os alunos poderão ter compreensão do que ocorre no plano de *Argand Gauss* quando somamos vetores ou quando os representamos geometricamente, evitando assim, o uso excessivo de representação algébrica, tradicionalmente trabalhada em sala de aula.

Sabemos que na contemporaneidade o uso da informática na educação tornou-se imprescindível, sobretudo nas aulas de matemática, e o conhecimento de um *software* apropriado é condição necessária e tem fundamental importância no trabalho docente, por ser este, uma ferramenta auxiliar no processo de ensino-aprendizagem dos

alunos.

Consideramos ser relevante o estudo sobre o uso do Geogebra no ensino dos números complexos, por esse contribuir de forma objetiva para a aprendizagem dos alunos a partir de uma abordagem atual e diferenciada dos conceitos de números complexos, ou seja, utilizando recursos tecnológicos. Assim, o estudo destaca as tecnologias como instrumento de ensino, por ser essa apenas uma, entre tantas outras abordagens de ensino atuais que visam proporcionar aprendizagem dos alunos relativa ao ensino da matemática por meio de ferramentas dinâmicas.

Desse modo, considerando que na atualidade, um dos maiores desafios no ensino de Números Complexos no Ensino Médio é a carência de métodos para se trabalhar tal conjunto, em face dessa evidência, surge o questionamento: Como o *software* educativo Geogebra pode contribuir como ferramenta do professor de matemática no ensino de números complexos no Ensino Médio?

Na tentativa de responder à questão de estudo e afim de possibilitar uma melhor compreensão sobre esta, o trabalho encontra-se na seguinte estrutura: após esta apresentação, trazemos uma abordagem teórica-metodológicas dos procedimentos utilizados na implementação da pesquisa; na sequência apresentamos os resultados obtidos, seguidos de uma breve discussão; finalizamos com algumas considerações à guisa de reflexões; por fim, fazemos alguns agradecimentos aos nossos colaboradores e apresentamos as referências que deram subsídios teóricos para a fundamentação e realização deste estudo.

Abordagem teórico-metodológica

A pesquisa caracteriza-se de natureza qualitativa, considerando que seu objetivo esteve voltado à realidade observada, a fim de avaliar a eficácia da utilização do *software* educativo *Geogebra* como ferramenta do professor de matemática no ensino de números complexos no Ensino Médio. A abordagem qualitativa, de acordo com (SAMPIERI; COLLADO; LUCIO, 2013, p. 35) “se fundamenta em uma perspectiva interpretativa centrada no entendimento do significado das ações de seres vivos, principalmente dos humanos e suas instituições”, fato que torna a referida abordagem mais apropriada. É importante destacar, que nosso propósito inicial, não era apenas a compreensão dos fenômenos, mas também, realizar uma intervenção pedagógica no intuito de alcançar os objetivos propostos à problemática investigada, por isso optou-se em utilizar como modalidade a pesquisa-ação (CRESWELL, 2010).

As atividades foram desenvolvidas no segundo semestre de 2016, durante as aulas de Matemática, na turma 1 do 3º Ano do Ensino Médio do turno vespertino, na Escola Estadual Irmã Sá, localizada na Rua Itacoatiara, s/n, Bairro Nossa Senhora de Nazaré em Parintins-AM. A opção pela escola se deu por vários motivos dentre os quais por essa ser localizada em um bairro carente, com sérios problemas sociais e também pela mesma possuir um laboratório de informática. Quanto à escolha da turma, seguimos a indicação da pedagoga da escola e as sugestões dos acadêmicos de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Parintins da Universidade do Estado do Amazonas (CESP/UEA), em razão desses licenciandos já terem vivenciado as dificuldades apresentadas pelos alunos no período em que estagiaram na referida escola.

Desse modo, observamos e acompanhamos atividades desenvolvidas com vinte alunos que participaram de forma efetiva da investigação por meio das atividades propostas através das aulas e oficinas. Para a realização das atividades, os alunos foram distribuídos em duplas, por motivo da escola dispor de apenas dez computadores em condições de funcionamento em seu laboratório. Na observação direta, de acordo com (FONSECA, 2008, p.18), “o pesquisador deve obter seus dados diretamente através de suas próprias observações dos fenômenos e deve perceber o que é significativo para o seu propósito”. Essa técnica foi usada na busca de conhecer a realidade da sala de aula no processo de ensino.

Vale destacar que a realização do estudo não se limitou à mera observação dos fatos, mas pretendeu participar dos acontecimentos a fim de compreender melhor o fenômeno investigado, desse modo optou-se pela técnica de observação participante, tendo em vista que, nesse contexto, “[...] o pesquisador mergulha no campo, observa segundo a perspectiva de um membro integrante da ação e também influencia o que observa graças à sua participação” (TRIVIÑOS, 2012, p. 51). Para os registros à respeito das observações feitas, foi utilizado o diário de campo. A seguir abordaremos sobre a relação tecnologia na educação matemática.

Tecnologia na Educação Matemática

O uso da tecnologia nas aulas de matemática, ainda é visto por muitos professores com certa reserva, visto que é frequente os docentes reclamarem da distração que a internet e os celulares causam em suas aulas, porém essa realidade pode ser mudada por meio de aulas mais atrativas que permitam aos alunos utilizarem recursos tecnológicos de maneira produtiva, de modo a ter compreensão de conceitos matemáticos abordados em sala de aula.

Assim, a inclusão da tecnologia na educação torna-se cada vez mais necessária, visto que ainda se percebe sua tímida utilização nas escolas públicas, logo, para uma aula mediada com ferramentas tecnológicas inovadoras, é preciso um conjunto de fatores para responder essa expectativa de sucesso com novos materiais didáticos, que por si agilizam o funcionamento e a rapidez nas atividades. Cabe observar recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) que assim orientam,

Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história. A exigência de rapidez e complexidade dos cálculos fez com que a Matemática se desenvolvesse e, por outro lado, as pesquisas e avanços teóricos da matemática e demais ciências permitiram o aperfeiçoamento de máquinas como o computador, que vêm tornando os cálculos cada vez mais rápidos (BRASIL, 2002, p. 118).

É possível que as aulas de matemática se tornem cada vez mais interessantes e atrativas aos alunos com o auxílio da tecnologia, desde que as ferramentas tecnológicas sejam utilizadas em prol do conhecimento do educando, e não simplesmente como distração, porém, para que esse fenômeno aconteça, faz-se necessário algumas mudanças nos paradigmas atuais vigentes, nos quais as aulas ministradas sejam cuidadosamente elaboradas como forma de desafio ou algum tipo de experiência de aprendizado profundo dos alunos, para que esses se sintam parte integrante das aulas no processo de construção do conhecimento.

Nesse sentido, uma ferramenta tecnológica que pode ser utilizada e contribuir no aprendizado da matemática é o *software* Geogebra, que apresenta uma complexa variedade de formas com rapidez na resolução de problemas que certamente levariam

longo tempo se fossem resolvidos de outras formas. É essa agilidade que pode favorecer tanto ao professor quanto ao aluno. Assim, o uso da tecnologia se torna uma imprescindível ferramenta renovadora no ensino. Além disso, a inclusão digital tão exigida na sociedade atual, se dá através de equipamentos computacionais avançados postos como início de uma nova era nas quais se evidencia que, mesmo sendo tecnologias essenciais, não se pode abandonar os antigos recursos didáticos nas aulas de matemática como, por exemplo, o pincel e quadro branco. Desse modo, se quisermos,

[...] que a escola média seja um ambiente culturalmente rico, é preciso, evidentemente, equipá-la com livros e recursos audiovisuais, com a assinatura de jornais e revistas, com laboratórios, com meios para desenvolver atividades artísticas e desportivas. A vivência e o aprendizado serão, em grande parte, decorrentes do que forem a produção e o intercâmbio cultural na escola e no interior das redes escolares. Não é possível, em pleno século 21, abrir mão dos recursos oferecidos pela tecnologia da informação e da comunicação e da capacitação dos professores para a utilização plena desses recursos (BRASIL, 2002, p. 142).

Podemos dizer que é urgente e necessário utilizar com maior frequência a tecnologia na Educação Matemática, visto que, na ausência de um laboratório de matemática, o recurso tecnológico poderá ser bastante útil nos processos fundamentais do ensino, possibilitando variação de estratégias ou de procedimentos como forma de explicitar as potencialidades dos alunos na busca de novas forma de resolver problemas, assim como de estimular sua criatividade e o raciocínio lógico, condições necessárias para a resolução de problemas.

Softwares educativos como ferramentas de ensino da matemática

No ensino na matemática, os números complexos apresentam relações íntimas com a Geometria, essa relação torna possível compreender suas formas geométricas por meio do uso *software* com auxílio de visualização gráfica, tornando a aprendizagem matemática dinâmica e mais atrativa. Assim, também é possível visualizar as transformações que acontecem quando são feitas as operações com números complexos. O *Geogebra* possibilita aos alunos maior compreensão tornando as aulas mais interessante, além de contribuir de forma eficaz no trabalho docente.

A vantagem de utilizar *software* nas construções geométricas em relação às construções com papel e lápis está justamente no aspecto dinâmico do ambiente visto que, “uma vez concluída uma construção no computador, é possível alterar qualquer um de seus elementos (em geral, por meio do arrastar do *mouse*) e observar as alterações consequentes nos demais elementos” GIRALDO (2012, p. 39). Assim, uma figura construída em geometria dinâmica representa, de forma mais efetiva, uma classe de objetos geométricos definida por propriedades e relações comuns que se preservam quando esses objetos são arrastados na tela.

Diversos autores têm apontado que esse aspecto permite ao aluno investigar maior número de exemplos além de explorar conjecturas, construindo uma preparação para o exercício de argumentação matemática. Nesse sentido, a utilização de um *software* nas aulas de matemática pode se tornar um importante recurso no processo de ensino, podendo propiciar segundo Goulart (2009, p. 20):

[...] a criação de ambiente construtivista de aprendizagem – o aluno passa a interagir com as múltiplas representações, sendo exigido no planejamento de suas ações, e ao executá-las é levado a reflexão e a construção de conhecimento.

Nesse contexto, as representações realizadas no computador são mais ricas de visualizações se comparadas às efetuadas nos modelos convencionais feitas no quadro, visto que, através de *software*, é possível modificar variáveis e imediatamente obter e verificar seus resultados gráficos na tela. O uso dessa ferramenta no ensino da matemática apresenta características mais atraentes ao estudo, tanto de números complexos como de outros conteúdos. Desse modo, proporciona mais entusiasmo aos alunos, levando-os a construir seus próprios conhecimentos, visto que a busca da aprendizagem se torna mais atraente quando se trabalha com o concreto.

A manipulação é uma das principais ideias de utilização no ambiente do Geogebra, pois ao manipular um objeto, o aluno se depara com diversas transformações que ocorrem nas operações dos complexos. Nesse sentido, o programa passa a ser o auxiliar direto do aluno nessas mudanças, visto que se torna mais fácil e prático manipular coordenadas na tela de um computador do que com caneta e papel, além de promover uma nova dinâmica entre os alunos. Tal dinamismo pode ser obtido através de manipulação nas representações que se apresentam na tela do computador como exemplifica Gravina e Santoro (1998, p. 2) quando dizem que:

[...] em geometria são os elementos de um desenho que são manipuláveis; no estudo de funções são objetos manipuláveis que descrevem relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis.

Assim, a tecnologia se torna uma ferramenta na construção do conhecimento matemático, além de proporcionar diversas situações de aprendizagens auxiliadas por *softwares* dinâmicos, como no caso do Geogebra. Como já foi dito, o conhecimento se torna mais atraente quando é buscado através do trabalho concreto e o aluno, ao se deparar com novos conhecimentos, se entusiasma com o que já assimilou e busca comprometer mais em sala de aula. Goulart (2009, p.12) relata que:

[...] a utilização de um *software* pode ser um interessante recurso no processo de ensino, pois se podem criar situações em que os alunos, na interação com este, passam a planejar e executar ações, passa a refletir sobre o resultado de suas ações, organizando ideias que levam à construção de conceitos.

Portanto, é necessário o uso da tecnologia na educação como um elo entre estudantes e o conhecimento matemático, enquanto ferramenta que poderá proporcionar tanto para professores quanto para os alunos suporte de trabalho no processo complexo de ensinar e aprender matemática, como proposto no estudo dos números complexos.

Um pouco dos números complexos

O conjunto dos números complexos integra os demais conjuntos numéricos estudados no ensino básico e compõe a Ementa Curricular de Matemática do 3º ano do Ensino Médio. Há algum tempo que os conceitos de números complexos não têm um ensino eficaz em sala de aula, seja pela complexidade do ensino dos seus conceitos ou, talvez, pela crença de que os conhecimentos de seus conceitos não têm aplicabilidade prática no cotidiano dos alunos.

É possível perceber o interesse pelo conhecimento desses números apenas por alunos que pretendem dedicar-se à área da Matemática Pura e Aplicada. No entanto, tal conceito se faz necessário devido suas diversas aplicabilidades, além de ser fundamental na resolução de questões propostas nas provas de vestibulares para ingresso às universidades públicas quanto nos exames como, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), concursos públicos e outras avaliações.

Segundo a literatura, após a equação do 2º grau, o estudo da Matemática ressurgiu na Itália no século XVI. Sua retomada veio ao meio da disputa de Cardano (1501-1576) e Tartaglia (1500-1557) na briga pela resolução da equação do 3º grau. A história desta disputa começa bem antes dos dois matemáticos ficarem conhecidos, em meados de 1510, quando o italiano Del Ferro encontra a fórmula geral da equação, porém, infelizmente, acabou morrendo sem publicá-la. Mas um de seus alunos, Antonio Maria Fior, quis ganhar fama com a solução de seu professor.

A curiosidade maior desta história fica por conta do fato de naquela época serem comuns os desafios entre sábios e então, com a fórmula elaborada por seu mestre, Fior desafia Tartaglia (já adversário de seu finado mestre) que, mesmo sabendo que Fior tinha posse da solução, também já a tinha resolvida, assim como as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. No fim, Fior acabou humilhado por Tartaglia (ROQUE; DE CARVALHO, 2012).

Ao tomar conhecimento das conquistas de Tartaglia, Cardano pediu que este a revelasse para que pudesse publicar em seu próximo livro, mas Tartaglia não concordou declarando que ele mesmo assim o faria. Insistindo com o dono da fórmula que este mostrasse ao menos uma delas, a de 3º grau, apenas para que tomasse conhecimento desta, prometendo seu absoluto sigilo; Tartaglia acaba revelando esta. No entanto, Cardano publicou a fórmula em sua obra *Ars Magna*, quebrando a promessa feita e, por esse motivo, a fórmula é conhecida até hoje como 'Fórmula de Cardano' (MONTEIRO; CERRI, 2001).

O aparecimento da Álgebra trouxe consigo ao mesmo tempo, o problema dos números negativos e suas raízes. Os matemáticos da antiguidade não aceitavam que o sinal negativo fosse parte de um número, então quando um resultado aparecia com um sinal negativo, esses relatavam que seu aparecimento fazia parte da operação.

Cardano foi pioneiro no desenvolvimento da Álgebra por admitir raízes negativas de equações, mesmo não sendo tão clara a natureza desses números. Matemáticos da época já investigavam sobre as regras de operações com sinais negativos, mas Cardano não apoiava a ideia de que "menos com menos pudesse dar mais" (ROQUE; DE CARVALHO, 2012).

Para os matemáticos, os números negativos eram vistos com desconfiança em seus estudos nas resoluções de operações, é interessante observar que esses números,

[...] quando apareciam nos cálculos, já eram chamados, na maioria dos casos, de negativos. No entanto, quando representavam a solução de uma equação, deviam ser chamados de fictícios, como em Cardano. Isto mostra que, apesar do reconhecimento da utilidade prática destes números para os cálculos, eles não eram considerados números verdadeiros, ou seja, verdadeiros objetos matemáticos. Isto porque os objetos que deviam ser admitidos na Matemática ainda se confundiam com as grandezas geométricas e, por esta razão, o sentido matemático de um número negativo ainda não podia ser plenamente admitido. Em uma tentativa de dar sentido aos números negativos, ainda no século XVI, o italiano Bombelli chegou a enunciar que: p15 com m20 dá m5 porque, se tivesse 15 unidades de moeda e devesse 20, pagando as 15 continuaria devendo 5 (ROQUE; DE CARVALHO, 2012, p. 170).

Alguns casos com raízes negativas apareceram nas equações de 3º grau e também nas equações de *Bhaskara* e isso foi a confirmação, que o conjunto dos Números Reais não eram suficientes para solucionar todas as operações, assim, houve necessidade do estudo de equações com raízes negativas, refutando a proposição de

que a solução de um problema com raiz de número negativo não teria solução. Conforme relatos no livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica* de 1572, a ideia de *Bhaskara* foi “supor que os números $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente. Com algumas contas chegou-se à conclusão que $a = 2$ e $b = 1$ ” (MONTEIRO; CERRI, 2001, p. 4).

Rafael Bombelli um admirador da *Ars Magna*, conseguiu chegar aos novos números. Embora fosse seu admirador, não achava claro a forma de exposição de seu trabalho, logo, escreveu a obra *l'Algebra* e chegou à equação: $(a + \sqrt{-b}) + (a - \sqrt{-b})$. Assim, o conjunto dos números complexos passou a ter a maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos.

Os números complexos em sala de aula

Durante as observações realizadas nas aulas de matemática, foi possível perceber que os números complexos são abordados de forma abstrata por meio de metodologias inadequadas que contribuem para que o aluno tenha dificuldades em identificar suas relações com a geometria.

Sobre as abordagens de números complexos nos livros de Matemática para o ensino médio, Paes (2013, p. 11) descreve que:

[...] esse conteúdo é abordado de forma padrão, ou seja, geralmente um fato histórico é citado, porém sem estar diretamente relacionado com o conteúdo a ser desenvolvido; ou ainda é realizada uma revisão acerca dos conjuntos numéricos até chegar aos números complexos.

O estudo dos números complexos no ensino médio é um campo fértil para a visualização de transformações e abordagens simultâneas com a Geometria Analítica, visto que o aluno do 3º ano já estudou esses conceitos nas séries anteriores, porém, quando se trata dos números complexos, percebemos que há certa dificuldade na aprendizagem, devido ao aluno não perceber sua relação com outros conceitos estudados e isso poderia ser amenizado se tais conceitos fossem abordados em articulação com os da Geometria Analítica.

De acordo com Oliveira (2010, p. 47), “a conexão entre os números complexos e a Geometria é deficiente, o que revela uma falta de articulação entre os capítulos, uma vez que a Geometria Analítica acabou de ser estudada”. Como relatado, essa falta de articulação também foi percebida nas observações realizadas, sobretudo nas aplicações geométricas das operações entre os números complexos que não haviam sido exploradas, o que nos levou a deduzir a dificuldade que os alunos apresentaram para interpretar as operações com transformações geométricas.

Foi possível perceber a carência de metodologias utilizadas nas abordagens de ensino dos complexos, além da falta de articulação entre seus conceitos e os da geometria analítica, fator esse bem perceptível nas aulas. É importante reconhecer a importância do estudo dos números complexos para a vida acadêmica do aluno do Ensino Médio, tanto pela sua história quanto pelas suas aplicações na geometria e demais campos da matemática.

Tomar os números complexos como um corpo isolado de outros conteúdos matemáticos seria estar atuando de modo inadequado. Embora que,

Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perdeu seu sentido para os que não

continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas (BRASIL, 2002, p. 122).

Em outras palavras, devido à falta de relação desses com outros conceitos estudados, podemos dizer que o aluno apresenta dificuldades em relacionar tal conteúdo aos assuntos estudados em anos anteriores e, assim, entender como funciona um número complexo. Nesse sentido, temos a compreensão de que o uso do *software* educativo Geogebra, enquanto ferramenta, auxiliará o professor nas aulas de matemática, visto que, por meio desse *software*, se pode abordar vários aspectos sobre os números complexos, seja na sua forma de pares ordenados, na forma algébrica e principalmente na geométrica a partir da qual cada um desses pontos será relacionado à conteúdos anteriores. Desse modo, a seguir vamos conhecer um pouco do *software* Geogebra.

Software Geogebra: uma ferramenta para o ensino da matemática

O desenvolvimento do estudo, teve início com breve apresentação do Geogebra aos alunos do 3º ano do Ensino Médio, a fim de evidenciar sua utilidade no estudo das operações com números complexos. Na sequência, foram apresentadas suas ferramentas e formas de resolução de suas operações de maneira que os alunos pudessem visualizar algebricamente e graficamente todo desenvolvimento do processo e assim ter melhor compreensão de como ocorriam as operações com números complexos no plano de Argand Gauss.

Explicou-se que o Geogebra é um *software* educativo livre que reúne ferramentas para aplicações em Geometria, Álgebra e Cálculo. Seu autor é o professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo na Áustria (GEOGEBRA, 2015; HOHENWARTER, 2013). O *software* consiste em um sistema de geometria dinâmica que permite realizar construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas e funções que podem ser modificadas dinamicamente. Tais construções podem ser feitas através de três janelas assim denominadas: janela gráfica, onde se constrói e visualiza gráficos; zona algébrica, janela que permite a inserção de equações e coordenadas para a construções de objetos e a folha de cálculo também chamada de planilha. Essas janelas, ilustradas na Figura 1, mostram que o Geogebra se configura com um grande potencial para trabalhar com várias aplicações vinculadas a números, vetores e pontos (SOUZA JUNIOR, 2010).

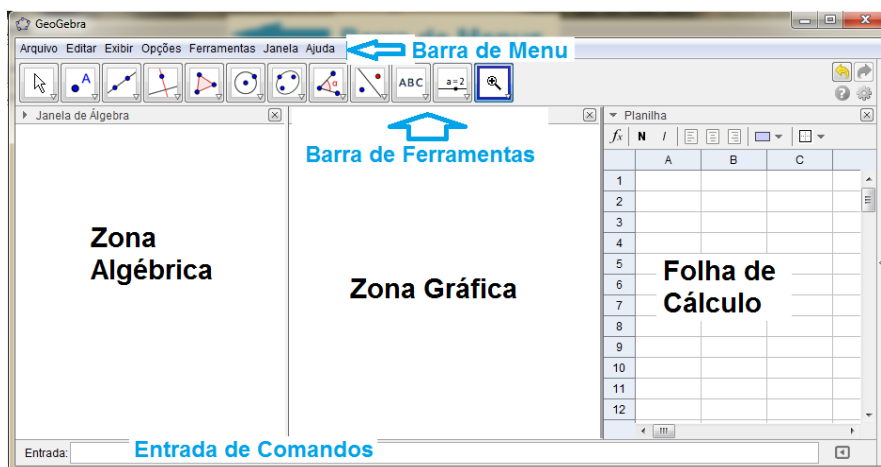


Figura 1: Representações no Geogebra.
Fonte: Chagas (2014).

Por ser um *software* livre e de multiplataforma, o Geogebra pode ser instalado em computadores com sistema operacional *Windows*, *Linux* ou *Mac OS*. É possível obter o *software* gratuitamente no endereço virtual <<https://www.geogebra.org/download>>. De acordo com seu manual, além das construções já citadas, também é possível construir gráficos de funções dinamicamente modificáveis com o *mouse*. Também admite expressões: $g: 3x + 4y = 7$ ou $c: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ e oferece diversos comandos entre os quais vale destacar, derivação e integração. A característica mais destacável de Geogebra é a percepção dupla dos objetos, isto é, cada expressão na janela de Álgebra corresponde a um objeto da Zona Gráficos e vice-versa.

Através do dinamismo proporcionado pelo *software* também podemos caracterizar o Geogebra como ferramenta auxiliar do professor de matemática e motivadora dos alunos no processo de ensino e de aprendizagem dos números complexos e outros conceitos matemáticos. Ao ser utilizado nas atividades desenvolvidas nas aulas de matemática ocorridas durante o processo de implementação dessa investigação, o *software* possibilitou realizar operações com números complexos, representações no plano de *Argand Gauss*, através do qual os alunos puderam perceber por meio de diversas formas de visualização o que ocorre durante esses processos.

Além disso, segundo Fanti (2010, p. 1), o Geogebra “possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos níveis da educação básica permitindo a abordagem de diversos conteúdos especialmente os relacionados ao estudo da geometria e de funções”. E, por ser um *software* livre, pode ser usado facilmente como uma importante ferramenta para despertar o interesse dos alunos do ensino básico pelo conhecimento matemático. Desse modo, vale a pena conhecê-lo.

O menu principal do *software*, Figura 2, auxilia na visualização, disponibilizando também os comandos gravar, ajuda e o comando para a criação de novos botões de ferramentas.

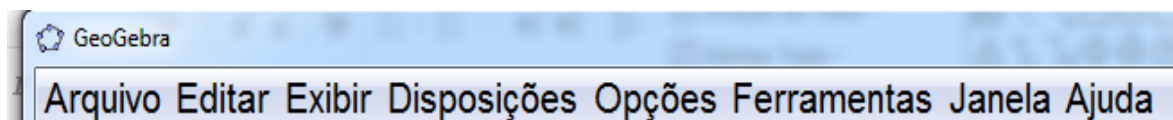


Figura 2: Menu principal.

Fonte: Próprios autores.

A barra de ferramentas, Figura 3, é composta de botões que auxiliam no processo de construção na zona de gráfico.

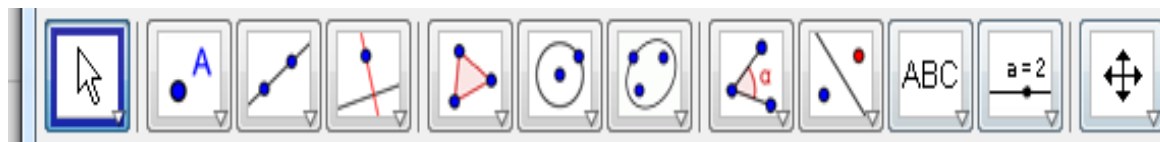


Figura 3: Barra de ferramentas.

Fonte: Próprios autores.

Ao passar o *mouse* por cada botão percebe-se que existem subitens nos botões da barra de ferramentas como ilustra a Figura 4.

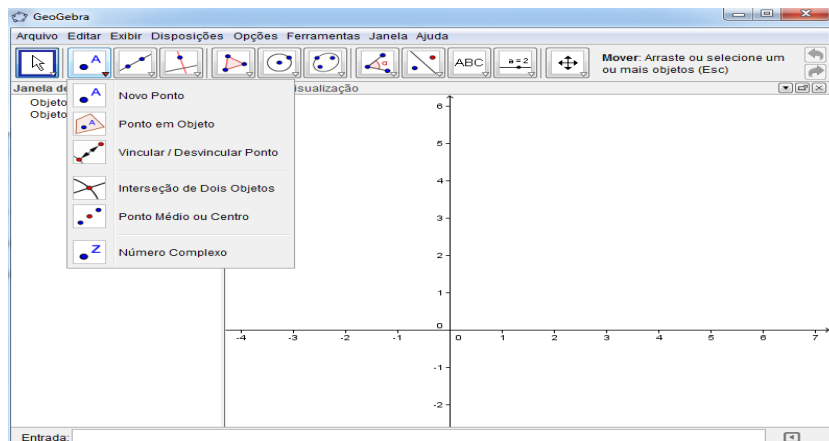








Figura 4: Divisões da barra de ferramentas.

Fonte: Próprios autores.

Nos subitens mostrados na Figura 4, destacamos alguns botões que foram utilizados nas operações de números complexos, a seguir destacaremos esses comandos e suas funções quando selecionados de acordo com as orientações de Chagas (2014, p. 36).

- a)  Mover: O comando serve para movimentar objetos selecionados pelo mesmo, além de poder ser apagado pela tecla delete ou movimentado;
- b)  Novo ponto: Serve para criar um novo ponto na janela de visualização com suas coordenadas fixadas no soltar do mouse;
- c)  Ponto médio ou centro: Tem como função criar ponto médio de segmentos e também de dois pontos;
- d)  Vetor definido por dois pontos: Serve para construir um vetor a partir dois pontos;
- e)  Vetor a partir de um ponto: Serve para criar um vetor de um ponto já existente e tendo como referência outro vetor;
- f)  Polígono: Cria polígonos a partir de dois pontos.

Importante esclarecer que tais ferramentas foram utilizadas de diversos modos como, por exemplo, nas operações dos números complexos, no plano de *Argand Gauss*, nos movimentos de rotação e translação entre os números, auxiliando o trabalho do professor de matemática de modo a evitar excessiva apresentação algébrica e abstrata, como ainda vem sendo feito em sala de aula.

Números complexos: atividades com o software Geogebra

Após a identificação dos comandos e ferramentas do *software*, foram feitas algumas considerações sobre sua utilização no estudo das operações dos números complexos. Entre as operações realizadas destacamos: a representação dos números complexos no plano de *Argand Gauss*, o cálculo do conjugado de um número

complexo, a soma de vetores e o cálculo do comprimento de um vetor e sua representação gráfica. Visando a compreensão dos alunos, foram feitos alguns esclarecimentos iniciais sobre as operações.

A adição de números complexos é dada de maneira simples e fácil de entender, “a adição de dois números complexos é realizada adicionando-se separadamente as partes reais e as partes imaginárias” (PAES, 2013, p. 35). Nestas condições, pode ser posto de maneira dinâmica para os alunos entender que somente as parte real combinam entre si, e a parte imaginária idem, tendo então: $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$, ao somar estes números temos $z_3 = a + bi + c + di$, organizando os termos semelhantes e evidenciando o restante temos $z_3 = (a + c) + (b + d)i$. Desta maneira, o aluno percebe que na soma de números complexos apenas somamos partes reais e partes imaginárias, dando a eles a ideia de translação, movimento que um objeto realiza de um ponto a outro, ou seja, é o deslocamento paralelo em linha reta de um objeto em função de um vetor.

Na multiplicação de dois números complexos, é aplicada primeiro a propriedade distributiva afim de facilitar a compreensão da operação, na sequência faz-se a redução dos termos semelhantes, visto que nesse tipo de operação recomenda-se que,

[...] realizar a propriedade distributiva, mais conhecida como regra do chuveirinho, para ter o produto de dois números complexos, dados os números $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, organizando e aplicando a regra distributiva temos $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$, temos um novo número na forma $z_3 = ac + adi + bci + bdi^2$, por fim, agrupando os termos semelhantes, evidenciando e aplicando $i^2 = -1$ temos $z_3 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (CHAGAS, 2014, p. 36).

Os processos desenvolvidos por meio das propriedades nas operações de adição e multiplicação representados graficamente na Figura 5, servem de apoio, para em se obter o produto dos números, assim por meio da multiplicação de números complexos é possível compreender a ideia de rotação, que é o movimento giratório que um corpo realiza ao redor do seu eixo.

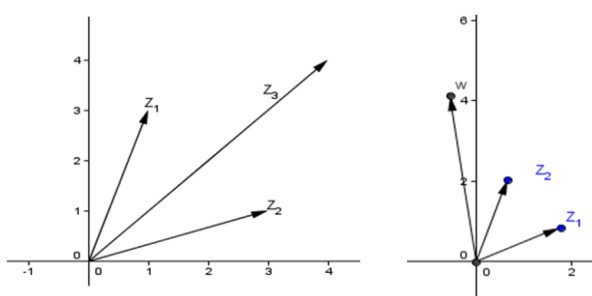


Figura 5: Adição e multiplicação de complexos.
Fonte: Próprios autores.

Desse modo, para explicitar as potencialidades do Geogebra e mostrar as possibilidades de solução, propôs-se a resolução de quatro situações problemas nas quais se faziam presentes características do conjunto estudado para que os alunos pudessem resolvê-los, a fim de estimular sua criatividade e o raciocínio lógico matemático.

A primeira atividade realizada foi a representação dos números complexos no plano de *Argand Gauss* como mostra a Figura 5. Nesta, os alunos puderam construir,

observar, modificar e perceber que um número complexo, além de poder ser visualizado através de sua representação algébrica também perceberam que tais números podem ser representados a partir de coordenadas. O dinamismo do Geogebra foi imprescindível para a visualização das diferentes representações das trocas de coordenadas, fato que o confirma como sendo de grande potencial para trabalhar com tais aplicações vinculadas aos números complexos (SOUZA JUNIOR, 2010).

Nessa atividade, os alunos representaram um número complexo de duas formas no Geogebra, primeiro utilizando a entrada de comando do *software* e a segunda por meio da barra de ferramentas. Esse procedimento inicial foi utilizado, com os mesmos parâmetros para que o aluno pudesse perceber as várias formas de representação do complexo por meio do *software*.

A construção do conjugado foi a segunda atividade proposta e teve como objetivo fazer com que os alunos pudessem compreender o conjugado. Foi pedido que movimentassem o vetor criado por cada um em seus computadores e depois descrevessem suas observações tanto na zona de gráfico quanto na janela de álgebra. Após a resolução dos exercícios, os estudantes relataram características do conjugado e demonstraram compreensão expressando na janela de álgebra que o conjugado tem sua parte imaginária negativo, como mostra a Figura 6, sendo o oposto do primeiro vetor criado.

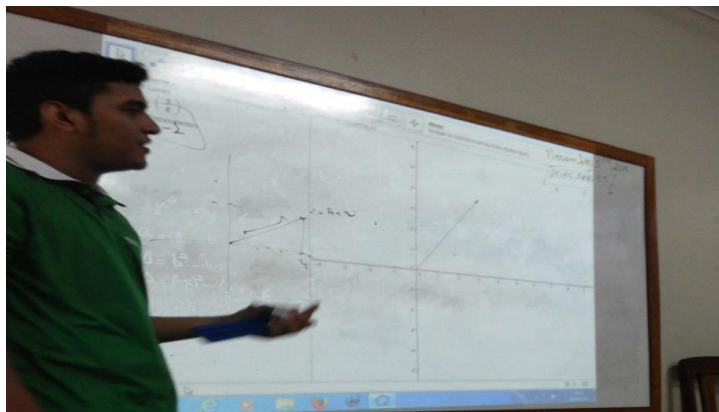


Figura 6: Representação de vetor no plano.
Fonte: Próprios autores.

A proposta de medir um vetor para representá-lo por um número complexo foi a terceira atividade. Essa visou que os alunos pudessem compreender de forma mais simples, como medir o comprimento de um vetor, não apenas usando a tradicional fórmula $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, mas de uma maneira mais dinâmica com o auxílio do programa.

Nesse caso foi utilizado o vetor $u = (4,3)$, para que os alunos encontrassem o comprimento do vetor, por meio de duas resoluções distintas, a primeira, usando os cálculos convencionais já conhecidos e a segunda utilizando o *software* para a mesma função $|Z| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} \rightarrow |Z| = \sqrt{16 + 9} \rightarrow |Z| = \sqrt{25} \rightarrow |Z| = 5$. Os alunos consideraram o uso do *software* como modo de aprendizagem diferenciado, por esse ter possibilitado suas compreensões conteúdo.

A quarta atividade esteve voltada a da soma de números complexos com o auxílio do *software*, seu objetivo foi mostrar aos estudantes o que ocorre no plano de *Argand*

Gauss quando são somados vetores. A visualização na janela de gráfico, Figura 7, permitiu visualizar os vetores nessa operação.

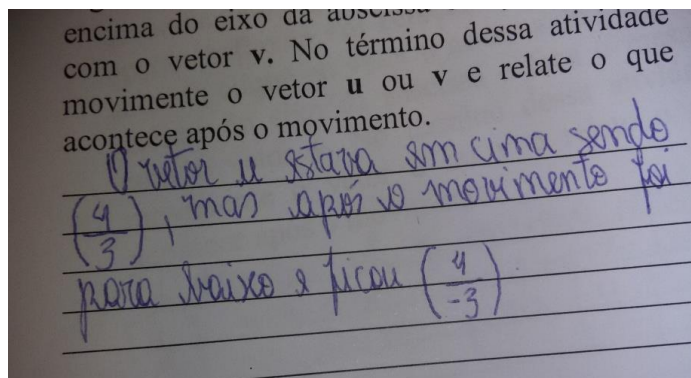


Figura 7: Resolução de exercício sobre conjugado.
Fonte: Próprios autores.



Figura 8: Oficina com uso do software.
Fonte: Próprios autores.

A realização dessa oficina, Figura 8, permitiu observarmos o interesse dos alunos pela matemática durante a realização das atividades, essa observação nos fez acreditar na necessidade de se utilizar novos métodos e ferramentas de ensino nas aulas de matemática de modo que o uso da tecnologia poderá ser uma boa opção no sentido de despertar o interesse dos alunos.

Nesse sentido,

Computadores podem servir como ferramentas heurísticas para matemáticos e estudantes de matemática, do mesmo modo como um microscópio serve ao biólogo: se a ferramenta é direcionada sobre fenômenos interessantes e corretamente focada, ela pode mostrar um quadro inesperado, frequentemente um quadro visual, do fenômeno em estudo, e então levar a novas ideias, ao conhecimento de relações desconhecidas até agora (DREYFUS, 1991, p. 30).

A tecnologia é uma tendência contemporânea que proporciona dinamismo as pessoas que a utilizam para fins educativos, como relatam Gravina e Santoro (1998, p. 2), ao dizer que o “dinamismo é obtido através de manipulações que se apresentam na tela de um computador, isso faz com que os estudantes se dediquem mais aos estudos de certos conteúdos matemáticos”.

O dinamismo proporcionado aos alunos foi de grande importância para o decorrer da intervenção, visto que o software proporciona a liberdade inexistente com uso do papel e da caneta apenas.

Em vários momentos, foi pedido aos alunos que movimentassem os vetores em seus computadores, essa atividade teve como objetivo fazer com que os alunos conhecessem algumas características dos números complexos apenas na visualização.

De fato, ao utilizar os comandos do *software*, os alunos trocaram experiências com os colegas, demandando maior interação entre a professora e os alunos. Dreyfus (1991, p. 30) diz que

[...] em relação ao estudo dos números complexos, através do dinamismo que o programa proporciona. Os computadores serviram de ferramentas aos alunos para o estudo do conjunto e suas características através da visualização proporcionada pelo Geogebra.

Portanto, podemos dizer que em todas ações desenvolvidas buscou-se a variação de estratégias ou do procedimento proposto nas atividades para explicitar as potencialidades do Geogebra e mostrar as possibilidades de solução. Dessa forma procurou-se apresentar outra forma de resolver o problema em questão, a fim de estimular a criatividade e o raciocínio lógico do aluno.

Algumas considerações

Nesse trabalho que objetivou utilizar o *Software* Geogebra como ferramenta no estudo dos números complexos enquanto forma de incentivar os professores e alunos ao uso das tecnologias de maneira adequada no processo de ensino aprendizagem da matemática a fim de promover a compreensão dos alunos sobre os conceitos abordados.

A realização do estudo permitiu verificar que o uso da tecnologia nas aulas de matemática pode ser estimulante para os alunos e mostrar diferentes possibilidades de estratégias que podem ser utilizadas na solução do problema. Assim, é possível realizar aplicações que em sua origem o software não oferece diretamente. Evidencia-se, portanto, que a tecnologia auxilia bastante o professor na demonstração de qualquer tipo de problema para seus alunos, o que permite desenvolver soluções em conjunto, estimulando o estudo.

Também foi notável a motivação dos estudantes durante a realização do estudo, eles puderam observar, questionar, interagir, e conhecer um pouco mais dos números complexos por meio da dinâmica do Geogebra. Percebeu-se também que o uso de metodologias diferenciadas nas aulas de matemática se torna cada vez mais indispensável, pois elas ajudam a captar a atenção dos alunos de modo que esses tenham compreensão dos conceitos abordados em sala de aula.

Nesse sentido, faz-se necessário que o professor seja inovador em suas aulas, crie oportunidades para que os alunos possam construir seus próprios conhecimentos, porém, isso só será possível por meio de mudanças na forma de abordagem nas aulas de matemática, é preciso que o aluno se sinta num ambiente educacional como podemos vivenciar na realização das atividades de modo que a tecnologia se torna uma possibilidade de fazer com que isso aconteça.

O dinamismo dos alunos, demonstrado no engajamento nas atividades e na busca de solução aos problemas propostos, pode ser considerado uma habilidade importante do século 21. Esse fenômeno contribui para mostrar que a tecnologia é uma tendência que cresce com os avanços atuais. Assim, tomamos como exemplo entre os

Softwares Educativos Matemáticos, o Geogebra, que serve de ferramenta a auxiliar os professores em sua docência.

Podemos constatar que o uso do *software* proporcionou dinamismo nas aulas de matemáticas, tendo como característica principal a visualização dos objetos matemáticos. Talvez esse seja um entre tantos fatores que corroboram para que em vários países a tecnologia seja uma ferramenta que ganhou ênfase no contexto pedagógico.

Enfim, consideramos que a intervenção teve sua importância tanto para professores quanto para alunos, visto que ambos puderam ensinar e aprender conceitos matemáticos de maneira diferenciada através da utilização do Geogebra. Esse, por sua vez, além de ser um programa gratuito proporciona recursos simples em sua utilização, configurando-se como um excelente recurso didático que pode ser manuseado em sala de aula até mesmo em celulares.

Diante do exposto, acreditamos que o estudo possa ter contribuído para o trabalho docente, assim como no processo de ensino aprendizagem da matemática, demonstrando que a utilização das tecnologias se tornam essenciais como instrumentos na aplicação do ensino não somente da matemática, mas também no ciclo geral da educação. Vale destacar que percebemos alguns avanços tanto na aprendizagem como no comportamento dos alunos, que souberam respeitar todas normas pré-estabelecidas durante realização das atividades propostas. Vimos estudantes engajados em busca de solução aos problemas propostos, fato que reforça nossa convicção de que a tecnologia os ajudou a pensar nas soluções.

Desse modo, espera-se que os resultados desse estudo possam ter contribuído de alguma forma para discussões sobre o processo de ensinar matemática e, quiçá, impulsionar professores a buscar estratégias didáticas que promovam melhorias na complexa tarefa do processo de ensinar matemática. Vale destacar que, apesar das constatações, faz-se necessário realizar outras pesquisas sobre o uso do Geogebra como ferramenta no ensino dos números complexos para que se tenha melhor e maior comprovação científica de sua aplicabilidade.

Agradecimentos e apoios

À Universidade do Estado do Amazonas (UEA) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM), pelo apoio concedido.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos PCNs. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: SEMTEC, 2002.

CHAGAS, A. S. **O Geogebra como ferramenta de auxílio no ensino de vetores no ensino médio**. 2014. 62 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de ROCHA, L. O. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: **Advanced Mathematical Thinking**, Edited by TALL, David, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

FANTI, E. L. C. Utilizando o software Geogebra no ensino de certos conteúdos matemáticos, In: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 5., 2010, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa: UFPB, 2010, p. 1-18.

FONSECA, L. A. M. **Metodologia científica ao alcance de todos**. 3. ed. Manaus: Valer, 2008.

GEOGEBRA, **Software de Matemática Dinâmica**. Disponível em: <<https://www.geogebra.org>>. Acesso em 16 nov. 2015.

GIRALDO, V. **Integrando Geometria e Funções: Gráficos dinâmicos**. Revista do Professor de Matemática (RPM), São Paulo, v.30, n. 79, p. 39 – 46, 3º quadrimestre, 2012.

GOULART, J. B. **O estudo da equação $ax^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ utilizando o software Grafeq**: uma proposta para o Ensino Médio. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. A. Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. **Informática na Educação: teoria & prática**, v. 1, n. 2, 1998.

HOHENWARTER, M. **Geogebra Quickstart**. Guia Rápido de Referência sobre o Geogebra. v. 20, n. 08, 2013. Disponível em: <www.geogebra.at>. Acesso em: 22 do out. 2016.

MONTEIRO, M. S.; CERRI, C. **História dos Números Complexos**. Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática (CAEM). São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001.

OLIVEIRA, C. N. C. **Números Complexos**: Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2010.

PAES, L. A. A. **Números complexos**: uma proposta didática baseada na modelagem matemática e em contextos históricos. 2013. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ROQUE, T.; DE CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Rio de Janeiro, 2012.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, M. P. B. **Metodologia de pesquisa**. 5.ed. Porto Alegre: Penso, 2013.

SOUZA JUNIOR, J. C. **Introdução ao Geogebra**. Universidade Federal de Alfenas; Unifal, MG. ago. 2010.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 2012.